

(1)

EXAMEN FEBRERO 2007I.T. MINASPROBLEMA 1PARTE I Introducimos los siguientes sucesos: $A =$ "Presencia del nuevo pavimento en la zona climática A" $B =$ "Presencia " " " " " " " " B" $C =$ "Presencia " " " " " " " " C" $D =$ "El pavimento se derrumba"

Sabemos que:

$$P(A) = 0'45, \quad P(B) = 0'30, \quad P(C) = 0'25$$

④ Nos piden las siguientes probabilidades:

$$P(D/A) \quad P(D/B) \quad P(D/C)$$

Teniendo en cuenta el enunciado, se tiene:

$$P(D/A) = P(X < 2) \quad \text{con} \quad X \sim N(\mu=1, \sigma^2=4)$$

↗ Tipificamos

$$P(|X| < 2) = P(-2 < X < 2) = P\left(-\frac{2-1}{2} < \underbrace{\frac{X-1}{2}}_{Z \sim N(0,1)} < \frac{2-1}{2}\right)$$

$$= P\left(-\frac{3}{2} < Z < \frac{1}{2}\right) =$$

$$= P\left(Z < \frac{1}{2}\right) - P\left(Z < -\frac{3}{2}\right) = 0.6915 - 0.0668 = \underline{0.6247}$$

• $P(D/B) = P(Y \geq 6)$ con $Y \sim B(n=8, p=0.8)$

$$P(Y \geq 6) = P(Y=6) + P(Y=7) + P(Y=8) =$$

$$= \binom{8}{6} \cdot (0.8)^6 \cdot (0.2)^2 + \binom{8}{7} (0.8)^7 \cdot 0.2 + \binom{8}{8} \cdot (0.8)^8 =$$

$$= 28 \cdot (0.8)^6 \cdot (0.2)^2 + 8 \cdot (0.8)^7 \cdot 0.2 + (0.8)^8 =$$

• $P(D/C) = P(U=3)$ con $U \sim P(\lambda=1)$

$$P(U=3) = e^{-1} \cdot \frac{1^3}{3!} = \underline{0.06}$$

(2)

② Nos piden $P(A/\bar{D})$

$$P(A/\bar{D}) = \frac{P(\bar{D}/A) \cdot P(A)}{P(\bar{D})}$$

↳ Th. Bayes

$$P(\bar{D}/A) = 1 - P(D/A) =$$

$$P(\bar{D}) = 1 - P(D)$$

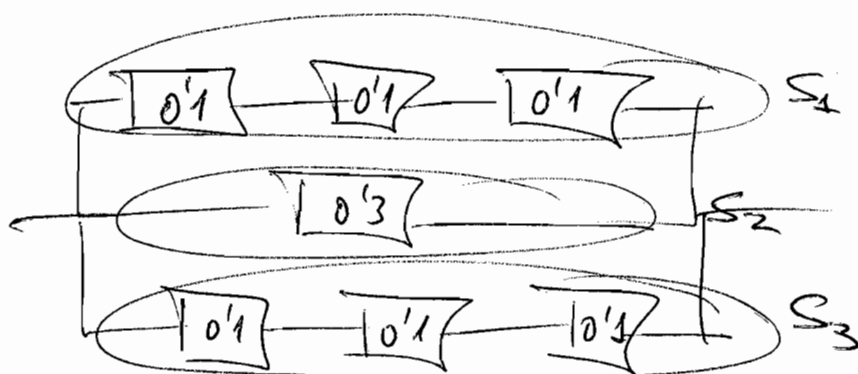
$$P(D) = P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C) =$$

↳ Th. Probab. Total

$$= 0'45 \cdot \quad + 0'30 \cdot \quad + 0'25 \cdot \quad =$$

③ Nos piden $P(\bar{D}/B)$

PART II



$$\begin{aligned} P(\text{"Circuito Funcione"}) &= P(\text{"Funcione } S_1" \cup \text{"Funcione } S_2" \cup \text{"Funcione } S_3"}) \\ &= 1 - P(\text{"Falle } S_1" \cap \text{"Falle } S_2" \cap \text{"Falle } S_3"}) \\ &= 1 - [P(\text{"Falle } S_1"}) \cdot P(\text{"Falle } S_2"}) \cdot P(\text{"Falle } S_3"})] \end{aligned}$$

↳ Independencia

$$\begin{aligned} \cdot P(\text{"Falle } S_1") &= 1 - P(\text{"Funcione } C_1" \wedge \text{"Funcione } C_2" \wedge \text{"Func. } C_3) \\ &= 1 - [0'9 \cdot 0'9 \cdot 0'9] = 0'271 \end{aligned}$$

$$\cdot P(\text{"Falle } S_2") = 0'3$$

$$\cdot P(\text{"Falle } S_3") = P(\text{"Falle } S_1") = 0'271$$

$$\begin{aligned} P(\text{"Funcione Circuito"}) &= 1 - [0'271 \cdot 0'3 \cdot 0'271] = \\ &= \boxed{0'9779} \end{aligned}$$

PROB. 2

$$f(x) = \begin{cases} K(x^2 + 2x) & 1 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

a) Para que sea función de densidad debe cumplirse:

$$1.^{\circ}) f(x) \geq 0 \quad \forall x \Leftrightarrow K \geq 0$$

$$2.^{\circ}) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \Leftrightarrow \int_1^4 K(x^2 + 2x) dx = 1 \Leftrightarrow$$

$$K \left[\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} \right]_1^4 = 1 \Leftrightarrow K \left[\left(\frac{4^3}{3} + 4^2 \right) - \left(\frac{1}{3} + 1 \right) \right] = 1$$

$$\Leftrightarrow K [36] = 1 \Rightarrow \boxed{K = \frac{1}{36}}$$

$$(b) F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

$$\bullet \text{ Si } x \leq 1 \Rightarrow F(x) = 0$$

$$\bullet \text{ Si } x \in [1, 4] \Rightarrow F(x) = \int_1^x \frac{1}{36} (t^2 + 2t) dt =$$

$$= \frac{1}{36} \left(\frac{t^3}{3} + t^2 - \frac{4}{3} \right)$$

$$\bullet \text{ Si } x \geq 4 \Rightarrow F(x) = 1$$

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{36} \left(\frac{t^3}{3} + t^2 - \frac{4}{3} \right) & \text{si } x \in [1, 4] \\ 1 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

$$(c) \bullet P(2 \leq X \leq 3) = F(3) - F(2) = \frac{1}{36} \left(\frac{3^3}{3} + 3^2 - \frac{4}{3} \right) -$$

$$- \frac{1}{36} \left(\frac{2^3}{3} + 2^2 - \frac{4}{3} \right) = \frac{1}{36} \left(\frac{19}{3} + 5 \right) = \frac{34}{108} = \boxed{0.31}$$

~~Ex~~ • ~~P(X > 3)~~

$$\bullet P(X > 3) = 1 - F(3) = 1 - \frac{1}{36} \left(\frac{3^3}{3} + 3^2 - \frac{4}{3} \right) = \boxed{0.53}$$

$$\bullet P(1 \leq X \leq 3 \mid X < 2) = \frac{P[(1 \leq X \leq 3) \cap (X < 2)]}{P(X < 2)} =$$

$$= \frac{P(1 \leq X \leq 2)}{P(X < 2)} = \boxed{1}$$

$$(d) \text{ Dureza} = 5 \times \text{Resistência} + 1 = 5 \cdot X + 1$$

Nos piden $E(\text{Dureza})$ ~~no~~

$$\text{Si llamamos } Y = \text{Dureza} \Rightarrow Y = 5 \cdot X + 1$$

$$\Rightarrow E(Y) = 5 \cdot E(X) + 1.$$

• Calculamos $E(X)$

$$E(X) = \int_1^4 x \cdot f(x) dx = \frac{1}{36} \int_1^4 x \cdot (x^2 + 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{36} \left[\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} \right]_1^4 = \frac{1}{36} \left(\left(\frac{4^4}{4} + \frac{2 \cdot 4^3}{3} \right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3} \right) \right) =$$

$$= 2'9375$$

$$\Rightarrow E(Y) = 5 \cdot 2'9375 + 1 = \boxed{15'6875}$$

PROB 3

(4)

$X = \text{"Tiempo de vida reguladores de voltaje"}$

$$X \sim \text{Exp}(\lambda = \frac{1}{10})$$

$$a) P(X < 8) = F_X(8) = 1 - e^{-\frac{8}{10}} = 1 - e^{-0.8} = 0.55$$

$$b) P(X > 11) = 1 - F_X(11) = e^{-\frac{11}{10}} = e^{-1.1} = 0.33$$

$$c) P(X < 12 \mid X > 4) = P(X < 8) = 0.55$$

↳ Propiedad Falta memoria

* No es necesario sustituir el regulador mientras funcione porque la exponencial tiene la propiedad de no envejecimiento.

d) $Y = \text{"Nº de reguladores, entre los 100, que fallan después de 11 años"}$

$$Y \sim B(n=100, p=0.33)$$

Nos piden $P(Y > 20)$

$$\text{Como } n > 30 \text{ y } n \cdot p \cdot (1-p) = 100 \cdot 0.33 \cdot 0.67 = 22.11 > 5$$

⇒ Podemos aproximar la ~~Bino~~ Binomial por una Normal.

$$P(Y > 20) \simeq P(W \geq 20.5) \text{ con } W \sim N(\mu = 33, \sigma = \sqrt{22.11})$$

$$\begin{aligned} P(Y > 20) &\simeq P(W \geq 20.5) = P\left(\frac{W - 33}{\sqrt{22.11}} \geq \frac{20.5 - 33}{\sqrt{22.11}}\right) \\ &= P(Z \geq -2.66) = P(Z \leq 2.66) = 0.996 \end{aligned}$$

PROB 4

$X = \text{"Resistencia nuevos discos"} \sim \text{Normal}(\mu = ?, \sigma = ?)$

$\mu, \sigma \rightarrow$ desconocidas.

Seleccionamos una muestra de tamaño 16 y obtenemos:

$$n = 16, \bar{x} = 25.5, s_x = 1$$

$$a) \text{ I.C. al } 95\% \text{ para } \mu = \left(\bar{X} \pm t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right)$$

$$\bullet t_{15, 0.975} = 2.13$$

$$\Rightarrow \text{I.C. al } 95\% \text{ para } \mu = \left(25.5 \pm 2.13 \cdot \frac{1}{\sqrt{16}} \right) =$$

$$= (25.5 \pm 0.53) = (24.97, 26.03)$$

Como el $25 \in (24.97, 26.03)$, en principio no podemos asegurar que sean distintos.

② Si queremos que el error sea inferior a 0'2, aproximaremos la t-Student por una $N(0,1)$: ⑤

$$Z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < 0'2 \Leftrightarrow 1'96 \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} < 0'2$$

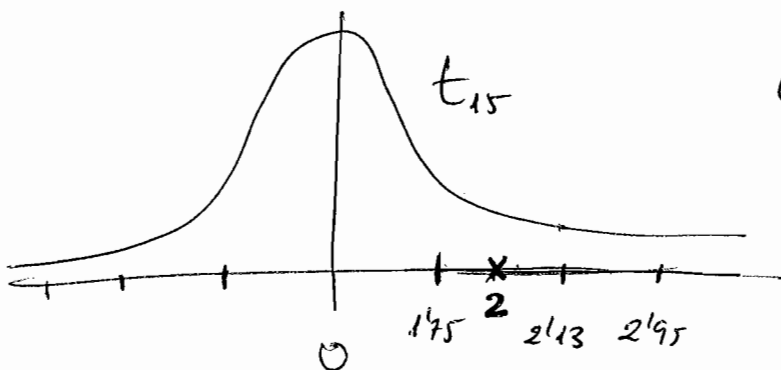
$$\Leftrightarrow \sqrt{n} > \frac{1'96}{0'2} \Rightarrow n > \left(\frac{1'96}{0'2}\right)^2 \Rightarrow n > 96'04$$

$$\Rightarrow \boxed{n \geq 97}$$

③ Contraste:

$$\begin{aligned} H_0: \mu &= 25 \\ H_1: \mu &\neq 25 \end{aligned}$$

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{25'5 - 25}{\frac{1}{\sqrt{16}}} = 2$$



CONTRASTE BILATERAL O DE
DOS COLAS

- Al 90% , ~~t_{15}~~ $t_0 = 2 \notin [-1'75, 1'75] \Rightarrow \text{Rechazo } H_0$
- Al 95% , $t_0 = 2 \in [-2'13, 2'13] \Rightarrow \text{Acepto } H_0$
- Al 99% , $t_0 = 2 \in [-2'95, 2'95] \Rightarrow \text{Acepto } H_0$.

