

(1)

ESTADÍSTICA MINASJUNIO 2005PROB 1

Para obtener el diagrama de caja-bigotes debemos calcular las siguientes cantidades:

- Mediana = $Q_2 = \frac{x_{(10)} + x_{(11)}}{2} = \frac{31 + 31}{2} = 31$
- $Q_1 = \frac{x_{(5)} + x_{(6)}}{2} = \frac{27 + 28}{2} = 27.5$
- $Q_3 = \frac{x_{(15)} + x_{(16)}}{2} = \frac{42 + 43}{2} = 42.5$
- $RIC = Q_3 - Q_1 = 42.5 - 27.5 = 15$
- $1.5 \cdot RIC = 1.5 \cdot 15 = 22.5$
- Límite Inferior de atípicos: $Q_1 - 1.5 \cdot RIC =$
 $= 27.5 - 22.5 = \boxed{5}$
- Límite Superior de atípicos = $Q_3 + 1.5 \cdot RIC =$
 $= 42.5 + 22.5 = \boxed{65}$
- Mínimo de la muestra = 16
- Máximo de la muestra = 49

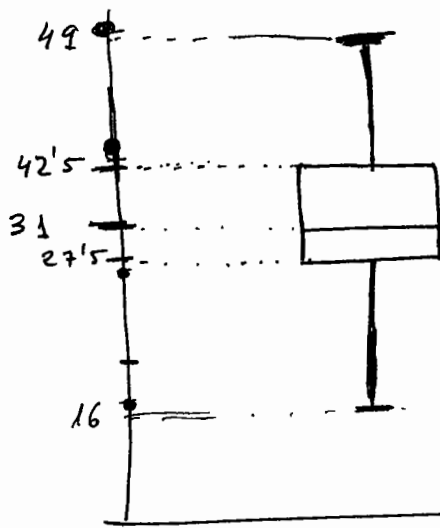


Diagrama sin datos atípicos.
La caja aparece dividida en dos partes desiguales, lo que quiere decir que los equipos situados entre Q_1 y Q_2

están más concentrados (puntuaciones más parecidas) que los equipos situados entre Q_2 y Q_3 (puntuaciones más dispersas).

Una situación similar ocurre con los equipos de la "cabeza" (bigote superior) y los equipos de la "cola" (bigote inferior), pero presentando menor dispersión los equipos del 1^{er} cuarto de la tabla de clasificación.

(2)

PROB 2

①

A = "El depósito se ha llenado a alta velocidad"

B = "El " " " " " baja velocidad"

D = "El llenado resulta defectuoso o incorrecto"

$$P(A) = 0.3 ; P(B) = 0.7$$

$$P(D|A) = 0.01 ; P(D|B) = 0.001$$

(a) Me piden $P(D)$

→ Th. Probab. Total

$$P(D) = P(A) \cdot P(D|A) + P(B) \cdot P(D|B) =$$

$$= 0.3 \cdot 0.01 + 0.7 \cdot 0.001 = \boxed{0.0037}$$

(b) Me piden $P(A|D)$ y $P(B|D)$

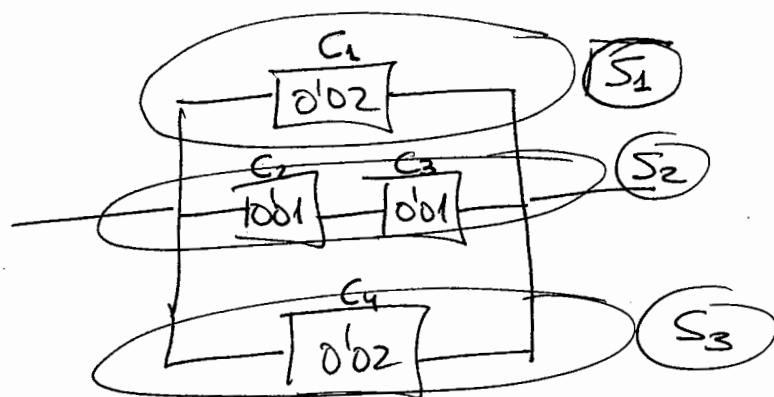
→ Th. Bayes

$$P(A|D) = \frac{P(D|A) \cdot P(A)}{P(D)} = \frac{0.01 \cdot 0.3}{0.0037} = \boxed{0.81}$$

$$P(B|D) = 1 - 0.81 = \boxed{0.19}$$

Es más probable que se llene a alta velocidad.

(2)



$$P(\text{"Funcione el Circuito"}) = 1 - P(\text{"Falle Circuito"})$$

$$P(\text{"Falle Circuito"}) = P(\text{"Falle } S_1" \cap \text{"Falle } S_2" \cap \text{"Falle } S_3"}) =$$

$$\stackrel{\text{Indep}}{=} \underbrace{P(\text{"Falle } S_1")}_{= 0'02} \cdot \underbrace{P(\text{"Falle } S_2")}_{= 0'0199} \cdot \underbrace{P(\text{"Falle } S_3")}_{= 0'02}$$

$$\begin{aligned} \cdot P(\text{"Falle } S_2") &= 1 - P(\text{"Funcione } S_2") = \\ &= 1 - P(\text{"Funcione } C_2" \cap \text{"Funcione } C_3"}) \stackrel{\text{Indep}}{=} 1 - 0'99 \cdot 0'99 = \\ &= 0'0199. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{P(\text{"Falle Circuito"})} = 0'02 \cdot 0'0199 \cdot 0'02 = 7'96 \cdot 10^{-6}$$

$$P(\text{"Funcione Circuito"}) = 1 - 7'96 \cdot 10^{-6}$$

PROB 3

(3)

①

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{4} & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ \frac{3}{4} & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 1 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

(a) $Rg(X) = \{-1, 1, 3, 4\}$ Puntos donde se produce un salto de la función de distribución.

• función puntual de probabilidad:

$$\bullet f_x(-1) = P(X=-1) = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$$

$$\bullet f_x(1) = P(X=1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\bullet f_x(3) = P(X=3) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\bullet f_x(4) = P(X=4) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$(b) \bullet P(-1 \leq X \leq 3) = f_x(-1) + f_x(1) + f_x(3) = \frac{3}{4}$$

$$\bullet P(1 < X < 4) = f_x(3) = \frac{1}{4}$$

$$\bullet P(1 \leq X \leq 4) = f_x(1) + f_x(3) + f_x(4) = \frac{3}{4}$$

② $X = \text{"Taille d'une particule contaminante"}$

(a) i) $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow K \geq 0$

~~ii)~~ ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \Leftrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{K}{x^3} dx = 1 \Rightarrow$

$$\int_1^{+\infty} \frac{K}{x^3} dx = K \left[\frac{x^{-2}}{-2} \right]_1^{+\infty} = K \cdot \left[\frac{1}{-2x^2} \right]_1^{+\infty} =$$

$$= K \left(0 + \frac{1}{2} \right) = K \cdot \frac{1}{2}$$

$$K \cdot \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{K = 2}$$

~~b)~~ b) $E(X) = \int_1^{+\infty} x \cdot \frac{2}{x^3} dx = 2 \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 2 \left[-\frac{1}{x} \right]_1^{+\infty} =$

$$= 2 \left(0 + 1 \right) = \boxed{2}$$

$$c) \mathbb{P}(2 \leq X \leq 3) = \int_2^3 \frac{2}{x^3} dx = 2 \cdot \left[\frac{1}{-2x^2} \right]_2^3 =$$

$$= \left[-\frac{1}{x^2} \right]_2^3 = -\frac{1}{9} + \frac{1}{4} = \frac{5}{36}$$

(4)

PROB 4

$X =$ "Tiempo de vida ^{en años} de un regulador de voltaje"

$$X \sim \text{Exp}(\lambda = 1/6) \quad E(X) = 6 \text{ años.}$$

$$(a) P(X < 5) = F_X(5) = 1 - e^{-5/6} = \underline{0.565}$$

$$(b) P(X > 7) = 1 - F_X(7) = e^{-7/6} = \underline{0.31}$$

$$(c) P(X < 10 | X \geq 6) = P(X < 4) = 1 - e^{-4/6} = \underline{0.486}$$

↳ propiedad falta de memoria

No conviene sustituir el regulador de voltaje mientras funcione, puesto que al ser exponencial no se deteriora.

(d) Nos preguntan por $E(X) = 6$, es decir, transcurre un tiempo medio de 6 años.

(e) $Y =$ "Nº de reguladores que fallan antes de 5 años, de entre los 100". $Y \sim B(n=100, p=P(X < 5) = 0.565)$

• Re piden $P(X \geq 1)$

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X=0) = 1 - \binom{100}{0} \cdot (0.565)^0 \cdot (0.435)^{100} \\ &= 1 - (0.435)^{100} \simeq 1. \end{aligned}$$

• Re piden $P(X > 20)$

Como $n = 100 > 30$

$$np(1-p) = 100 \cdot 0'565 \cdot 0'435 = 24'58 > 5 \quad \Rightarrow$$

aproximamos la Binomial por una Normal

$$V \sim N(\mu = np = 56'5, \sigma^2 = np(1-p) = 24'58)$$

$$\begin{aligned} P(X > 20) &\simeq P(V \geq 20'5) = P\left(\frac{V - 56'5}{\sqrt{24'58}} \geq \frac{20'5 - 56'5}{\sqrt{24'58}}\right) \\ &= P(Z \geq -7'26) \simeq 1 \end{aligned}$$

PROB 5

X = "Conductividad térmica del liero Aruco"

$X \sim \text{Normal}$.

$E(X) = \mu \rightarrow$ "conductividad térmica promedio" (desconocida)

$\text{Var}(X) = \sigma^2 \rightarrow$ desconocida.

m.a.s. $\rightarrow n = 10, \bar{x} = 41.924, s_x = 0.284$

① Como X es Normal y σ^2 desconocida, sabemos que $\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$

Por tanto, $P(-t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \leq t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$

$\Leftrightarrow P(\bar{X} - t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$

$\Rightarrow$ I.C. para $\mu = (\bar{X} \pm t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}})$

Para mi muestra: $\bar{x} = 41.924, s_x = 0.284, n = 10$

$\alpha = 0.05 \Rightarrow t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} = t_{9, 0.975} = 2.26$

$(41.924 \pm 2.26 \cdot \frac{0.284}{\sqrt{10}}) = (41.924 \pm 0.203) = (41.721, 42.127)$

Interpretación: La conductividad térmica promedio del hierro Armco, muy probablemente, sea un valor comprendido entre 41'721 y 42'127

② Estimación puntual $= \bar{x} = 41'924$

Error - Estimación $\leq 0'203$

③ Imponemos la condición:

$$t_{n-1, 1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \leq 0'05$$

Sin embargo, al tener el tamaño muestral también en los grados de libertad de la t-Student, ~~aproximamos~~ tomaremos como valor aproximado el correspondiente a una $N(0,1)$, $z_{1-\alpha/2} = z_{0'975} = 1'96$

$$1'96 \cdot \frac{0'284}{\sqrt{n}} \leq 0'05 \Rightarrow n \geq \left(\frac{1'96 \cdot 0'284}{0'05} \right)^2 = 123'9$$

$$\Rightarrow \boxed{n \geq 124}$$

④ $\begin{cases} H_0: \mu = 42 \\ H_1: \mu < 42 \end{cases}$

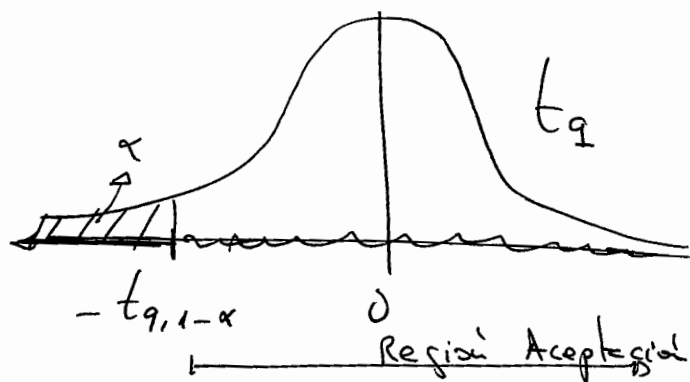
Como σ^2 desconocido, el estadístico del contraste es, suponiendo H_0 cierta:

$$t_0 = \frac{\bar{x} - 42}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1} \equiv t_9$$

(6)

~~Para~~ Para mi muestra, el estadístico vale:

$$t_0 = \frac{41'924 - 42}{\frac{0'284}{\sqrt{10}}} = -0'846$$



- $\alpha = 0'1 \Rightarrow -t_{9, 0'90} = -1'38$.
- Como $t_0 = -0'84 > -1'38 = -t_{9, 0'90} \Rightarrow$ Aceptamos H_0 al 90% confianza.
- " No podemos decir que la ~~resistencia~~ conductividad media del hierro Armco sea ~~menor~~ significativamente menor de 42."
- Si tomamos $\alpha = 0'05$ y $\alpha = 0'01$, seguiremos aceptando H_0 .

