

$$\bullet \quad z_1 - c_1 = z_2 - c_2 = 0$$

$$\bullet \quad z_3 - c_3 = 3 \times \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \lambda - 0 = 2 - \frac{1}{3} \lambda$$

$$\bullet \quad z_4 - c_4 = 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{2}{3} \lambda - 0 = -1 + \frac{2}{3} \lambda$$

Para que no interese fabricar P_2 , la variable " x_2 " debe salir de la base, por tanto la variable de entrada será " x_4 ". Observar que se trata de la única posibilidad puesto que en la fila de la table del símplex correspondiente a " x_2 ", el único valor positivo no básico se corresponde con " x_4 ".

Para que entre " x_4 ", debe cumplirse $z_4 - c_4 < 0$

$$\Rightarrow -1 + \frac{2}{3} \lambda < 0 \Rightarrow \lambda < \frac{3}{2}$$

• Para beneficios del producto P_2 inferiores a $\frac{3}{2}$
No interese fabricar ~~el~~ dicho producto P_2 .

(2)

c) Según el enunciado, las matrices primas pueden variar según el vector de perturbaciones:

$$\vec{b}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego } \vec{b}_{\text{nueva}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+\lambda \\ 6-\lambda \end{pmatrix}$$

Queremos buscar las soluciones para $M_1, M_2 \in [4, 8]$
 $M_2 \in [2, 6]$

$$\left. \begin{aligned} 4+\lambda &\in [4, 8] \Leftrightarrow \lambda \in [0, 4] \\ 6-\lambda &\in [2, 6] \Leftrightarrow \lambda \in [0, 4] \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \lambda \in [0, 4]$$

• Sabemos que $B^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

$$\vec{x}_{B, \text{nueva}} = B^{-1} \cdot \vec{b}_{\text{nueva}} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 8/3 \end{pmatrix} + \lambda B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2/3 \\ 8/3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 + \lambda \\ 8/3 - \lambda \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left. \begin{aligned} 2/3 + \lambda &\geq 0 \Leftrightarrow \lambda \geq -2/3 \\ 8/3 - \lambda &\geq 0 \Leftrightarrow \lambda \leq 8/3 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \lambda \in [-2/3, 8/3]$$

(3)

① Para $\lambda \in [-\frac{2}{3}, \frac{8}{3}]$, la base $\{x_1, x_2\}$ se mantiene óptima con solución óptima:

$$\vec{x}^* = \left(\frac{2}{3} + \lambda, \frac{8}{3} - \lambda \right)$$

② Si $\lambda = \frac{8}{3} \Rightarrow \vec{x}_B = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ podemos aplicar el simplex dual para obtener una base óptima alternativa. Sale x_2 de la base y entra x_3 . La nueva tabla es:

X/B	x_1	x_2	x_3	x_4	$\vec{x}_B$	$\vec{x}_{B_0}$
x_1	1	2	0	1	6	-1
x_3	0	-3	1	-2	-8	3

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - \lambda \\ -8 + 3\lambda \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} 6 - \lambda \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \leq 6 \\ -8 + 3\lambda \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \geq \frac{8}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

③ $\Rightarrow \forall \lambda \in [\frac{8}{3}, 6]$, la base $\{x_1, x_3\}$ se mantiene óptima con $\vec{x}^* = (6 - \lambda, 0)$ solución óptima.

(4)

d) Dual:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } 4y_1 + 6y_2 \\ \text{s.t. } 2y_1 + y_2 \geq 3 \\ y_1 + 2y_2 \geq 2 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Por el Th. dualidad fuerte, la solución óptima del dual viene dada por:

$$\vec{y}^* = \vec{c}_B^T \cdot B^{-1};$$

Por tanto, si la base inicial la formaban variables de holgura, la solución del dual ~~se~~ se corresponde con los valores " $z_j - c_j$ " de las variables de holgura que formaran la base inicial. En nuestro caso, $z_3 - c_3 = 4/3$, $z_4 - c_4 = 1/3$

$$\Rightarrow \vec{y}^* = (4/3, 1/3) \text{ solución del dual.}$$

$y_1^* = 4/3 \rightarrow$ Indica que el beneficio que reportaría una unidad adicional de Materia prima M_1 es de $4/3$.

$y_2^* = 1/3 \rightarrow$ El beneficio ~~adi~~ que reportaría una unidad adicional de M_2 es de $1/3$.

(5)

PROB 2

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si se decide cargar el Artículo "i"} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \quad i=1,2,3,4.$$

$$a) \quad \begin{cases} \text{Max } Z = 5x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 4x_4 \\ \text{s.t. } 6x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 4x_4 \leq 20 \\ x_i \in \{0,1\} \quad \forall i=1..4. \end{cases}$$

Se trata de un problema Mochila.

• Calculamos los ratios $\frac{\text{beneficio}}{\text{volumen}}$

$$r_1 = \frac{5}{6}, \quad r_2 = \frac{6}{8}, \quad r_3 = \frac{6}{7}, \quad r_4 = \frac{4}{4}$$

• Los ordenamos de mayor a menor:

$$r_4 > r_3 > r_1 > r_2$$

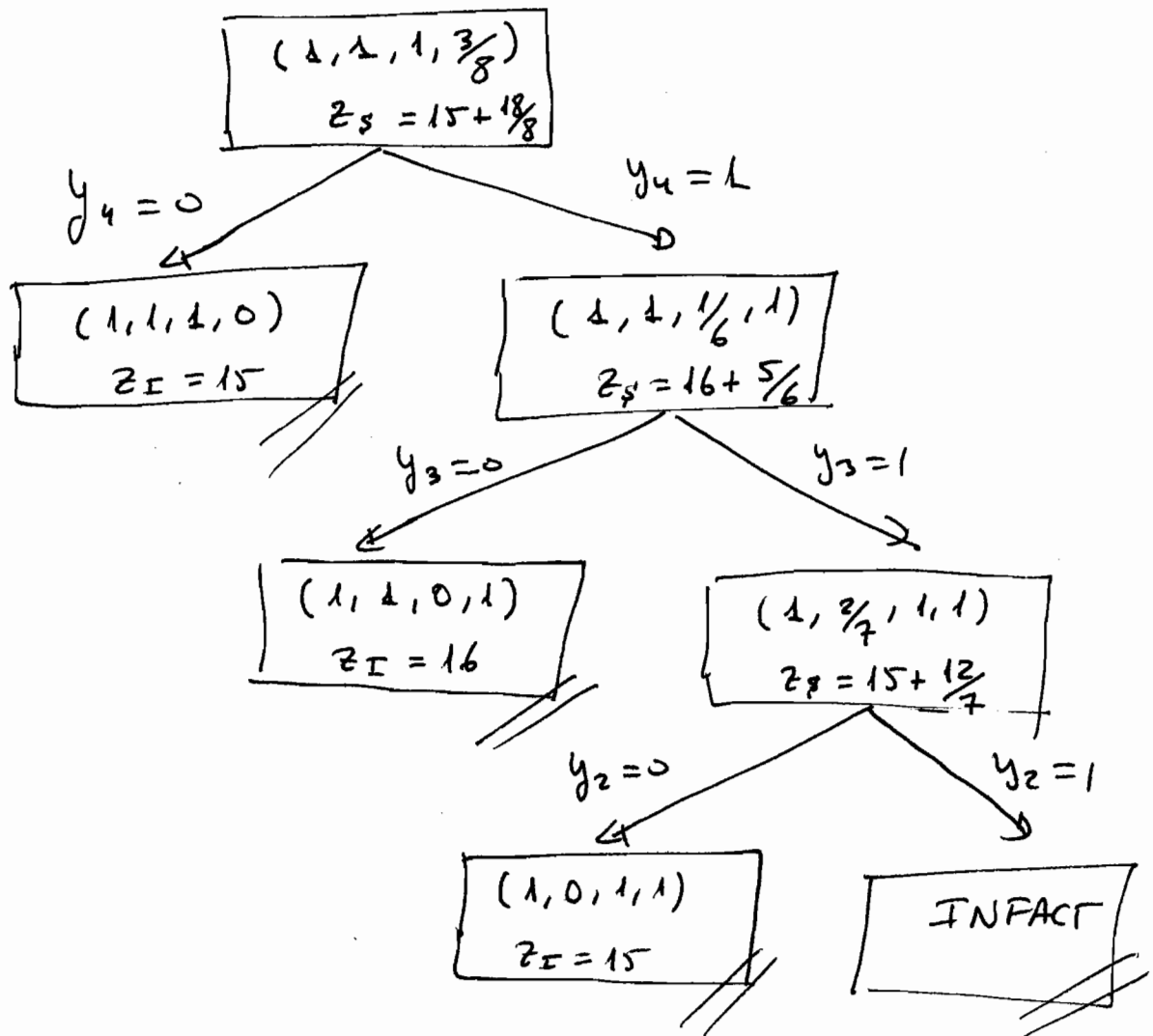
• Hacemos el cambio de variable:

$$y_1 = x_4, \quad y_2 = x_3, \quad y_3 = x_1, \quad y_4 = x_2$$

$$\begin{cases} \text{Max } Z = 4y_1 + 6y_2 + 5y_3 + 6y_4 \\ \text{s.t. } 4y_1 + 7y_2 + 6y_3 + 8y_4 \leq 20 \\ y_i \in \{0,1\} \quad \forall i=1..4 \end{cases}$$

6

Àrbol de ramificació - acotació:



La solució òptima es $\vec{y} = (1, 1, 0, 1)$, $z^* = 16$

$\Rightarrow \vec{x}^* = (0, 1, 1, 1) \Rightarrow$ Debem carregar les articles 2, 3 y 4.

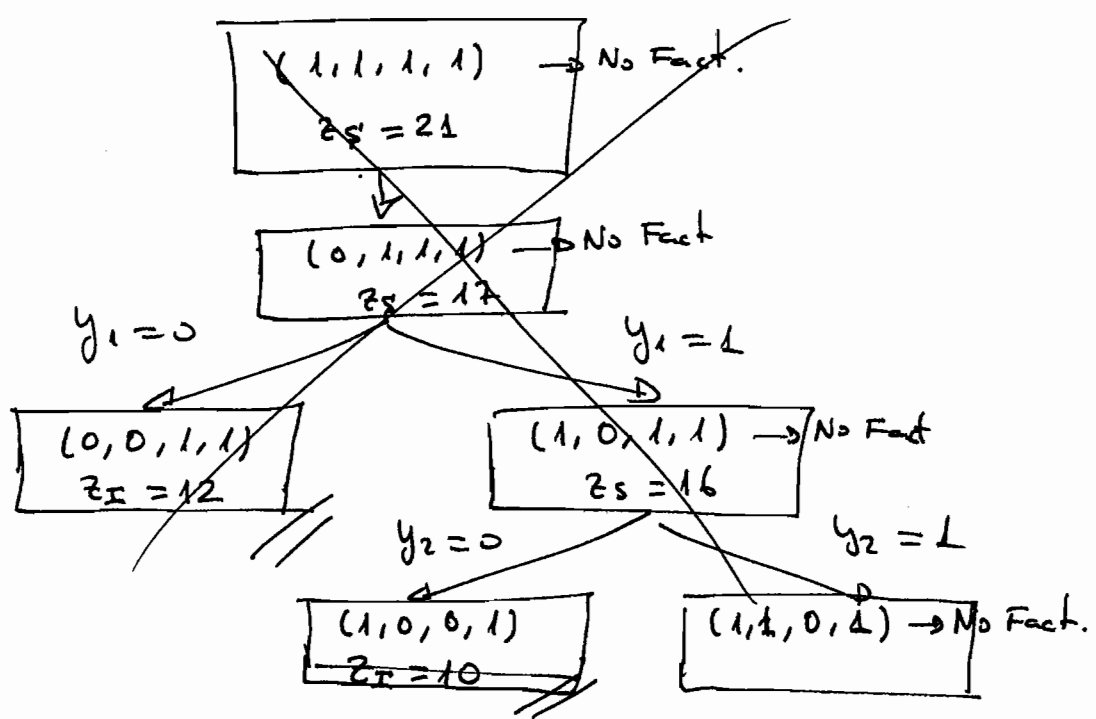
b)
$$\begin{cases} \text{Max } z = 5x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 4x_4 \\ \text{s.t.} \quad 6x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 4x_4 \leq 20 \\ \quad \quad 6x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 8x_4 \leq 15 \\ \quad \quad x_i \in [0, 1] \quad \forall i=1, \dots, 4. \end{cases}$$

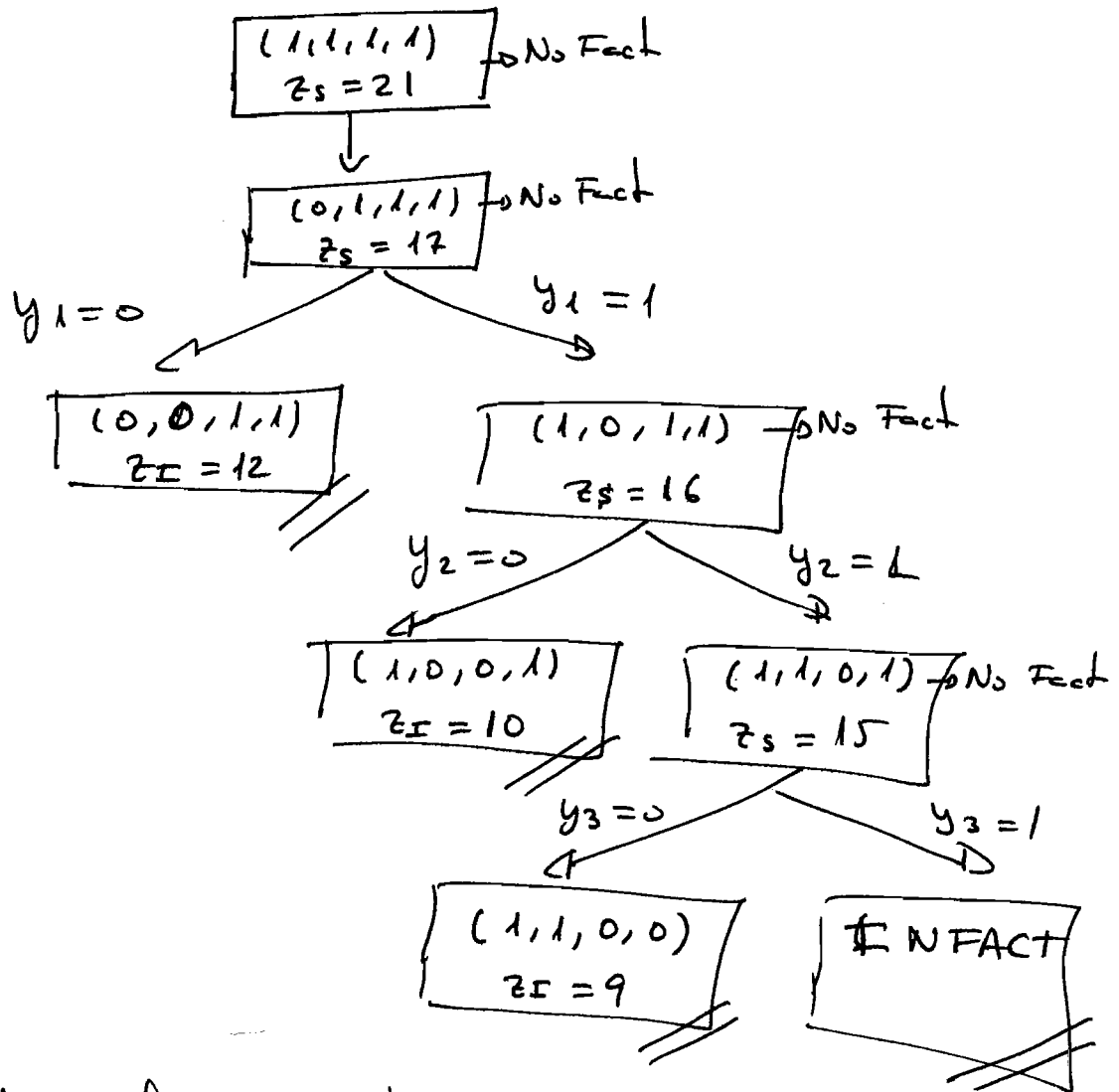
Usaremos programación 0-1.

- Necesitamos que $0 \leq c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq \dots \leq c_n$
- Hacemos el cambio de variable:

$y_1 = x_4, y_2 = x_1, y_3 = x_2, y_4 = x_3$

$$\begin{cases} \text{Max } z = 4y_1 + 5y_2 + 6y_3 + 6y_4 \\ 4y_1 + 6y_2 + 8y_3 + 7y_4 \leq 20 \\ 8y_1 + 6y_2 + 7y_3 + 4y_4 \leq 15 \\ y_i \in [0, 1] \end{cases}$$





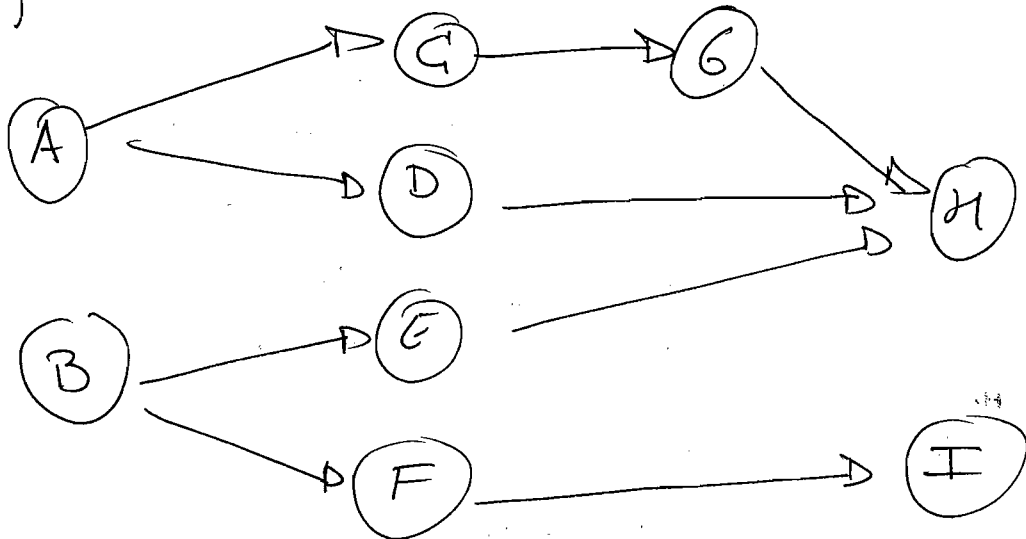
Luego, la solución óptima es $\vec{y}^* = (0, 0, 1, 1)$

$\Rightarrow \vec{x}^* = (0, 1, 1, 0)$ Cargamos artículos 2 y 3.

$$z^* = 12$$

PROB 3

a)

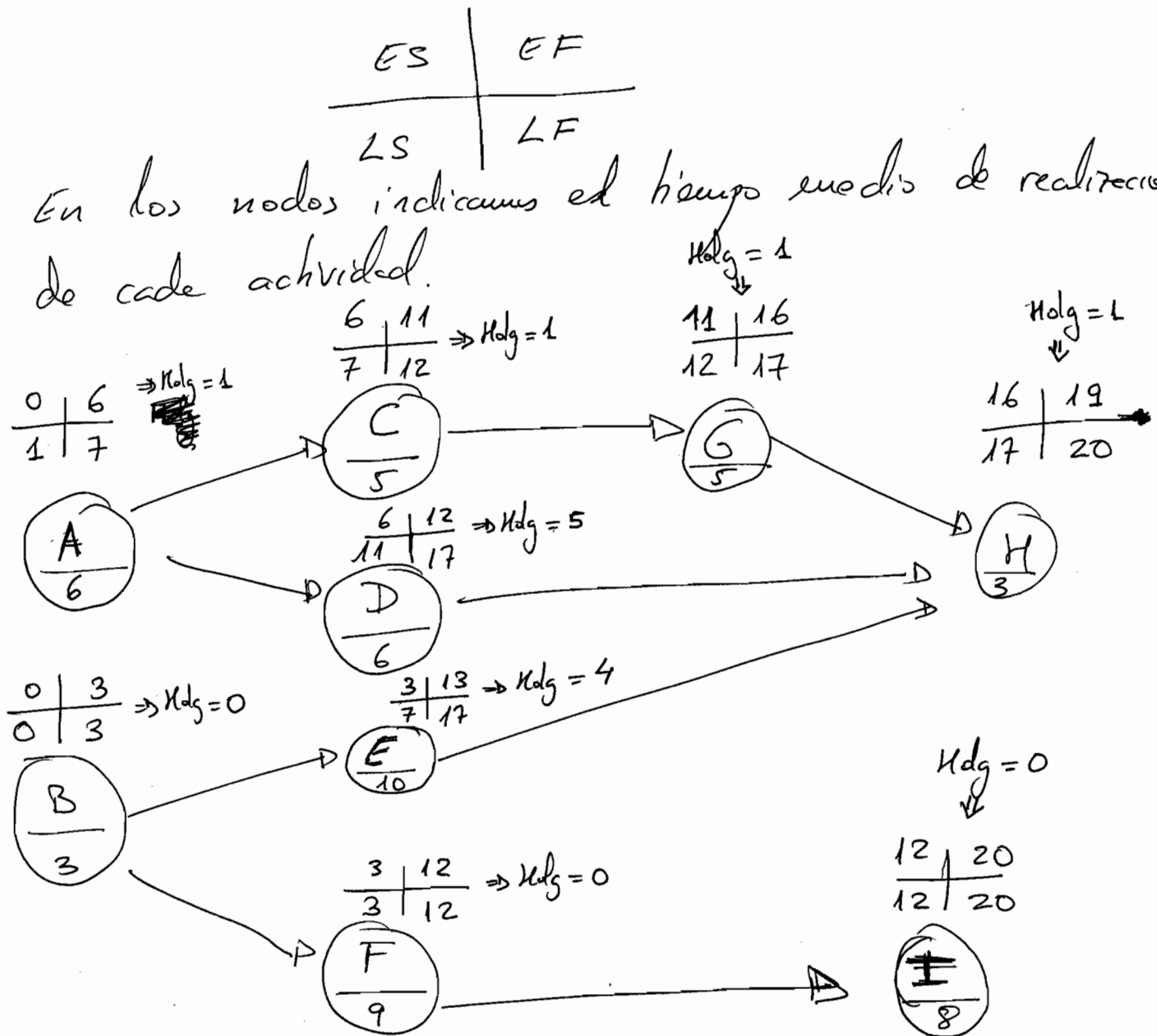


b) Como se trata de un PERT, debemos calcular los tiempos medios de realización para cada actividad usando la expresión:

$$\mu = \frac{t_m + 4t_o + t_M}{6}$$

Una vez calculados los tiempos medios, obtendremos el camino crítico considerando dichos tiempos deterministas, es decir, ~~no~~ como si fuera un CPM.

En el siguiente grafo indiquemos los tiempos Earliest y Latest de la siguiente manera:



Las holguras de cada actividad se obtienen como:

$$H = LF - EF = LS - ES$$

Las actividades con holgura cero son las que determinan el camino crítico. En este caso:



Sea $T =$ "Tiempo de realización del proyecto."

6

• $E(T) = 20$ semanas $\rightarrow$ tiempo medio de realización del proyecto.

$$\bullet \text{Var}(T) = \text{Var}(B) + \text{Var}(F) + \text{Var}(I) =$$

$$= \frac{(5-1)^2}{36} + \frac{(14-4)^2}{36} + \frac{(14-2)^2}{36} = \frac{16+100+144}{36} =$$

$$= \frac{260}{36} = 7\frac{1}{2}$$

Hemos supuesto que ~~los~~ tiempos de realización de las actividades son independientes.

c) Nos piden $P(T < 18)$ y $P(T \geq 22)$.

• ~~$P(T < 18)$~~ Para calcular estas probabilidades tendremos en cuenta que $T \sim \text{Normal}(\mu=20, \sigma=\sqrt{7\frac{1}{2}})$

$$\bullet P(T < 18) = P\left(\frac{T-20}{\sqrt{7\frac{1}{2}}} < \frac{18-20}{\sqrt{7\frac{1}{2}}}\right) = P(Z < -0.74)$$
$$= 1 - 0.7703 = \boxed{0.2297}$$

$$\bullet P(T \geq 22) = \boxed{0.2297}$$

d) Llamemos t_d al tiempo que buscamos. Debe cumplirse:

$$P(T \leq t_d) = 0.95 \Leftrightarrow P\left(\frac{T-20}{\sqrt{7.2}} \leq \frac{t_d-20}{\sqrt{7.2}}\right) = 0.95$$

$$\Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{t_d-20}{\sqrt{7.2}}\right) = 0.95 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{t_d-20}{\sqrt{7.2}} = 1.64 \Rightarrow \boxed{t_d = 24.428 \text{ semanas.}}$$

e) . Si la fecha de entrega es de 21 semanas, el gasto esperado es de: $6000 \times P(T > 21)$.

$$P(T > 21) = P\left(\frac{T-20}{\sqrt{7.2}} > \frac{21-20}{\sqrt{7.2}}\right) = P(Z > 0.355) = 0.355$$

$$\text{Gasto esperado} = 6000 \cdot 0.355 = \boxed{2130 \text{ euros}}$$

. Si la fecha de entrega es de 22 semanas, el gasto esperado es de: $6000 \times P(T > 22) + 1.200 =$

$$= 6000 \cdot 0.2297 + 1200 = \boxed{2578.2 \text{ euros}}$$

Conclusión: No nos interesa renegociar el contrato.