Dpto. Matemática Aplicada y Estadística

Ingeniero en Organización Industrial
Asignatura: Investigación Operativa (Curso 07/08)
Profesora: María del Carmen Ruiz Abellón
Hoja 4: Dualidad

1. Formular el problema dual de los siguientes problemas lineales y obtener la solución de ambos resolviendo sólo uno de ellos:

   a) $\max z = x_1 - x_2$
   s.a.
   $3x_1 + x_2 \leq 6$
   $2x_1 + 3x_2 \leq 12$
   $x_1, x_2 \geq 0$

   b) $\min z = x_1 + x_2$
   s.a.
   $x_2 \leq 2$
   $x_1 + 2x_2 \leq 3$

   c) $\min z = 2x_1 - 3x_2$
   s.a.
   $x_1 + x_2 \geq 1$
   $x_2 \geq 1$
   $x_1, x_2 \leq 0$

   d) $\min z = -x_1 - x_2$
   s.a.
   $x_1 - x_2 \leq 5$
   $x_1 - 2x_2 \geq 7$
   $x_1, x_2 \geq 0$

2. Resolver con el algoritmo del simplex dual los siguientes problemas, formular el problema dual de cada uno de ellos y obtener la solución del dual a partir de la solución del primal:

   a) $\min z = -x_1 - 2x_2 + x_3$
   s.a.
   $3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6$
   $x_1 + 3x_2 - 4x_3 \geq 10$
   $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

   b)∗ $\min z = 2x_1 + 4x_2 - x_3$
   s.a.
   $3x_1 + 6x_2 - 2x_3 \geq 8$
   $x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$
   $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

   c) $\max z = -x_1 + 2x_2$
   s.a.
   $4x_1 + 3x_2 \geq 16$
   $x_1 + 3x_2 \geq 6$
   $x_1 + x_2 \geq 4$
   $x_1, x_2 \geq 0$

3. Dado el problema de programación lineal

   $$\max z = -4x_1 + 3x_2$$
   s.a.
   $-2x_1 + 3x_2 \leq 18$
   $-5x_1 + 3x_2 \leq 35$
   $x_1 - x_2 \geq -7$
   $x_1 \leq 0, x_2 \geq 0$

   comprobar, aplicando las condiciones de holgura complementaria, que $x_1 = -7$, $x_2 = 0$ es solución óptima.

4. Resolver el problema dual de los siguientes problemas lineales y obtener la solución del primal mediante las condiciones de holgura complementaria:

   a) $\max z = 2x_1 + 4x_2$
   s.a.
   $-2x_1 - 3x_2 \geq -12$
   $x_1 + x_2 = 4$
   $5x_1 + 6x_2 \leq 18$
   $x_1 + x_2 \leq 8$
   $x_1 \geq 0$

   b)∗ $\min z = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3$
   s.a.
   $2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 20$
   $2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 24$
   $x_1 + x_2 + 5x_3 \geq 28$
   $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

5. Una compañía desea planificar la producción de tres de sus productos. Cada uno de los tres productos deben procesarse por tres departamentos. Las horas de proceso en cada departamento, así como las horas anuales disponibles vienen dadas en la siguiente tabla:

Producto	Preparado	Mezclado	Acabado
A	1	2	1
B	2	4	2
C	4	2	1
Horas disponibles	5000	5500	4500

   Además se sabe que el beneficio neto de cada producto es 30, 40 y 50 u.m., respectivamente. Planificar la producción del próximo año con objeto de maximizar el beneficio. ¿Cuál sería el beneficio si se dispusiera de una hora adicional en el departamento de mezclado?

6. Una compañía fabrica tres productos P_1, P_2 y P_3 que necesitan para su elaboración dos recursos R_1 y R_2. La cantidad de recurso que precisa cada unidad de producto y su beneficio se dan en la siguiente tabla:

	P_1	P_2	P_3	Disponibilidad
R_1	0	1	2	230
R_2	2	1	1	360
Beneficio unitario	2	2	4	

   Además, la producción mensual conjunta de P_1 y P_2 debe ser al menos de 160 unidades. Determinar qué cantidades de cada producto debe fabricarse para maximizar el beneficio. ¿Cuánto estaría dispuesto a pagar por obtener una unidad más de R_2?

7. Dado el problema de programación lineal

$$\begin{cases} \max z = x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \quad s.a. \\ \quad\quad x_1 + x_2 - x_3 \leq 2 \\ \quad\quad x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ \quad\quad 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 \\ \quad\quad x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \text{ no restringida} \end{cases}$$

   (a) Escribir su problema dual y determinar una cota superior y otra inferior para los valores óptimos de ambos problemas.

   (b) Determinar una cota superior y otra inferior para los valores óptimos de ambos problemas.

   (c) Comprobar si $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = 0$ es o no solución óptima del problema dual aplicando las condiciones de holgura complementaria.

8. Para la elaboración de una dieta con la que satisfacer las necesidades de los nutrientes 1 y 2, se dispone de tres alimentos A, B y C, y de la información reflejada en la siguiente tabla sobre las unidades de cada nutriente contenidas en cada unidad de alimento y sobre el costo de cada alimento:

Alimento	Nutriente 1	Nutriente 2	Costo (u.m.)
A	1	0	2
B	0	1	3
C	3	2	9
Necesidades mínimas	3	5	

   Además, por sus características, no es posible suministrar al individuo más de 4 unidades entre los alimentos A y B.

   (a) ¿Qué cantidad de cada alimento debería suministrarse en la dieta para minimizar el coste?

   (b) Suponiendo que la base óptima se mantiene, ¿cuál sería el coste óptimo si las necesidades mínimas de nutrientes 1 y 2 fuesen 4 y 5.5, respectivamente? Responder a la cuestión anterior sin resolver nuevamente el problema.

9. Una determinada empresa fabrica 4 productos que requieren para su elaboración los siguientes recursos:

Producto	1	2	3	4
Mat Prima (ton/Unid)	2	2	1.5	4
Espacio ($\text{m}^2/Unid$)	2	2.5	2	1.5
Tasa de prod (unid/hora)	15	30	10	15

   Para ello dispone de 180 toneladas de materia prima diaria, de un espacio total para su almacenamiento de 230 m2 y para la producción se dispone de 5 horas diarias como máximo. Las ganancias por unidad de producto son 5 para el producto 1, 6'5 para el producto 2, 5 para el producto 3 y 5'5 para el producto 4. Entonces:

   (a) Plantear y resolver el problema dual.

   (b) A partir de la solución del dual, obtener la solución del primal aplicando las condiciones de holgura complementaria.

   (c) Nos plantean alquilar otro almacén de 100m2. Determinar el precio máximo que debemos pagar diariamente por el alquiler

10. Dado el problema de programación lineal

$$\begin{cases} \min z = -3x_1 + x_2 + x_3 \\ \quad s.a. \\ \quad\quad x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 11 \\ \quad\quad -4x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3 \\ \quad\quad 2x_1 - x_3 = -1 \\ \quad\quad x_i \geq 0,\ i = 1,2,3 \end{cases}$$

   comprobar, aplicando las condiciones de holgura complementaria, si $x_1 = 4$, $x_2 = 1$, $x_3 = 9$ es una solución óptima.

11. Dado el problema de programación lineal

$$\begin{cases} \max z = -4x_1 + 3x_2 \\ \quad s.a. \\ \quad\quad -2x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ \quad\quad -5x_1 + 3x_2 \leq 35 \\ \quad\quad x_1 - x_2 \geq -7 \\ \quad\quad x_1 \leq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

   (a) Escribir su problema dual y comprobar que ambos problemas tienen valor óptimo finito, utilizando para ello las relaciones de dualidad.

   (b) ¿Podemos asegurar que los valores óptimos de los dos problemas coinciden? ¿Por qué? Determinar una cota superior y otra inferior para los valores óptimos de ambos problemas.

   (c) Comprobar, aplicando las condiciones de holgura complementaria, si $x_1 = -3$, $x_2 = 4$ es o no solución óptima del problema primal.