Dpto. Matemática Aplicada y Estadística

Titulación: **Ingeniero en Organización Industrial**
Asignatura: **Investigación Operativa**
Curso: **2009/2010**
RECOPILACIÓN PROBLEMAS DE EXÁMENES
Símplex, Dualidad y Sensibilidad

1. **[JUNIO 2009] (4 ptos)** Una planta química fabrica dos productos A_1 y A_2 con dos materias primas M_1 y M_2. La siguiente tabla muestra los consumos (en kg) de materia prima por kg de producto fabricado, sus disponibilidades y beneficios de A_1 y A_2 (por kg):

	A_1	A_2	*Disponibilidad*
M_1	2	5	4000
M_2	2	3	4800
Beneficios (euros)	1	2	

La compañía desea determinar el número de kilos de los productos A_1 y A_2 que deben producir para maximizar sus beneficios.

Se sabe que la tabla óptima viene dada por:

	x_1	x_2	x_3^h	x_4^h	x_B
x_1	1	5/2	1/2	0	c
x_4^h	0	k	-1	1	d
$z_j - c_j$	0	1/2	1/2	0	

donde x_i representa los kilos de producto A_i fabricados, $i = 1, 2$.

(a) Formula el problema y calcula los datos que faltan *(c, d y k)*. **(0.75 ptos)**

(b) Determina todas las soluciones del problema si los beneficios son de la forma $(1, 2) + \lambda(1, 1)$, con $\lambda \geq -1$. **(1 pto)**

(c) Determina todas las soluciones del problema para valores del recurso $M_1 \in [0, 4500]$. **(0.75 ptos)**

(d) Formula el problema dual. Determina la solución óptima del dual a partir de la solución del primal usando holguras complementarias. **(0.75 ptos)**

(e) Estamos pensando en adquirir un poco más de materia prima para aumentar nuestra producción y por tanto nuestros beneficios. ¿Interesa comprar materia prima M_2? Nos ofrecen una partida de 500 unidades adicionales de materia prima M_1 por 200 euros, ¿aceptarías la oferta? Razona tus respuestas. **(0.75 ptos)**

2. **[SEPTIEMBRE 2009] (3 puntos)** Consideremos el siguiente problema de programación lineal:

$$\left\{\begin{array}{lccc} Max\ z = & 2x_1 + 5x_2 & & \\ \text{s.a.} & & & \\ & 2x_1 + 5x_2 & \leq & 4000 \\ & 2x_1 + 3x_2 & \leq & 4800 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

(a) Formula su problema dual. **(0.5 puntos)**

(b) Proporciona una cota inferior y una cota superior para el valor óptimo de ambos problemas. Justifica tu respuesta. **(0.5 puntos)**

(c) Comprueba, usando el teorema de holguras complementarias, si el punto $\mathbf{x} = (2000, 0)$ es o no solución óptima del problema primal. **(1 punto)**

(d) Se sabe que la tabla óptima del primal es la siguiente:

	x_1	x_2	x_3^h	x_4^h	x_B
x_2	2/5	1	1/5	0	800
x_4^h	4/5	0	-3/5	1	2400
$z_j - c_j$	0	0	1	0	

Determina la solución óptima si se dispone de una partida adicional de 6000 unidades del primer recurso, es decir, que el Recurso 1 pasa a valer 10000 unidades en lugar de 4000. **(1 punto)**

3. **[JUNIO 2008] (3.5 puntos)** Una planta química fabrica dos productos A_1 y A_2 con dos materias primas M_1 y M_2. La siguiente tabla muestra los consumos (en kg) de materia prima por kg de producto fabricado, sus disponibilidades y beneficios de A_1 y A_2 (por kg):

	A_1	A_2	*Disponibilidad*
M_1	2	5	4000
M_2	2	3	4800
Beneficios (euros)	2	4	

La compañía desea determinar el número de kilos de los productos A_1 y A_2 que deben producir para maximizar sus beneficios.

(a) Formula los problemas primal y dual. Proporciona una cota inferior y una cota superior para el valor óptimo de ambos problemas. Justifica tu respuesta. **(0.5 puntos)**

Se sabe que la tabla óptima viene dada por:

	x_1	x_2	x_3^h	x_4^h	x_B
x_1	1	5/2	1/2	0	2000
x_4^h	0	-2	-1	1	800
$z_j - c_j$	0	1	1	0	

donde x_i representa los kilos de producto A_i fabricados, $i = 1, 2$.

(b) ¿Para qué valores del beneficio del producto A_1 la solución anterior se mantiene óptima? **(0.5 puntos)**

(c) ¿Cuál debe ser al menos el beneficio del producto A_2 para que sea interesante fabricarlo? Resuelve el problema para dicho valor del beneficio **(0.75 puntos)**

(d) Determina la solución óptima del dual a partir de la solución del primal usando holguras complementarias. **(0.75 ptos)**

(e) Debido a la huelga de transportes, para el próximo mes las disponibilidades de materias primas M_1 y M_2 se verán reducidas a 3800 y 4500, respectivamente. Suponiendo que esta modificación no varía la base óptima, determina cuál será el beneficio que obtendrá la compañía sin resolver nuevamente el problema. Razona tu respuesta. **(0.5 puntos)**

(f) Determina la solución óptima cuando las disponibilidades de materias primas M_1 y M_2 son de 3800 y 3500, respectivamente **(0.5 puntos)**

4. **[SEPTIEMBRE 2008] (2.5 puntos)** Una determinada empresa elabora cuatro tipos de piensos para animales (P_i, $i = 1, ..., 4$). La empresa dispone, cada mes, de 4500 horas de mano de obra y de 4000 sacos de materia prima. La siguiente tabla muestra el tiempo y materia prima requeridos para la elaboración de un kilo de cada tipo de pienso, así como los beneficios unitarios:

	P_1	P_2	P_3	P_4
Tiempo (horas)	0.1	0.3	0.8	0.4
Materia prima (sacos)	0.2	0.1	0.1	0.3
Beneficios (euros)	1	1	4	3

La compañía desea determinar el número de kilos de cada tipo de pienso que deben producir para maximizar sus beneficios.

Se sabe que la tabla óptima viene dada por:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5^h	x_6^h	x_B
x_4	0	1	k	1	4	-2	10000
x_1	1	-1	-4	0	-6	8	d
$z_j - c_j$	0	1	1	0	6	2	35000

donde x_i representa los kilos de pienso P_i fabricados, $i = 1, ..., 4$.

(a) Determina los valores de los parámetros k y d que faltan en la tabla óptima. **(0.5 puntos)**

(b) Según la tabla óptima, sólo interesa fabricar los piensos P_1 y P_4 con el fin de maximizar beneficios. ¿Entre qué valores puede oscilar el recurso "materia prima" de manera que se mantenga dicha situación? **(0.75 puntos)**

(c) Determina la solución óptima si la materia prima mensual disponible asciende a 5000 sacos. **(0.5 puntos)**

(d) ¿Cuál debe ser al menos el beneficio del pienso P_3 para que sea interesante fabricarlo? Resuelve el problema para dicho valor del beneficio **(0.75 puntos)**

5. **[JULIO 2007] (3 puntos)** La planta que tiene la multinacional General Electric en Cartagena fabrica tres tipos de plásticos P_1, P_2 y P_3. Para la elaboración de un kilo de cada tipo de plástico se precisan dos recursos R_1 y R_2. La cantidad de recurso que precisa cada kilo de producto, el beneficio por kilo de producto y los recursos disponibles para el próximo mes, se dan en la siguiente tabla:

	P_1	P_2	P_3	*Disponibilidad*
R_1	8	4	8	120
R_2	3	6	6	135
Beneficio (por Kg)	c_1	14	6	

La compañía desea determinar el número de kilos de los productos P_1, P_2 y P_3 que debe producir el próximo mes para maximizar sus beneficios.

Se sabe que la tabla óptima viene dada por:

	x_1	x_2	x_3	x_4^h	x_5^h	x_B
x_1	1	0	k	1/6	-1/9	5
x_2	0	1	2/3	-1/12	2/9	d
$z_j - c_j$	0	0	26/3	1/6	20/9	

donde x_i representa los kilos de plástico P_i fabricados, $i = 1, 2, 3.$.

(a) Formula el problema correspondiente y calcula los datos que faltan (c_1, d y k). **(0.6 ptos)**

(b) Determina todas las soluciones del problema si los beneficios son de la forma $(8, 14, 6)+\lambda(0, 1, -1)$, con $\lambda \geq 0$. ¿Cuál es la solución si los beneficios de los plásticos son de 8, 19 y 1, respectivamente? **(0.75 ptos)**

(c) Determina todas las soluciones del problema para valores del recurso $R_1 \in [0, 300]$. ¿Cuál sería la solución óptima si sólo disponemos de 80 unidades de recurso R_1? **(0.75 ptos)**

(d) Formula el problema dual y determina su solución óptima usando holguras complementarias. **(0.6 ptos)**

(e) Nos ofrecen una partida de 120 unidades adicionales de recurso R_1 por 15 u.m. ¿Aceptarías la oferta? ¿Y una partida de 300 unidades adicionales de R_1 por 45 u.m.? **(0.3 ptos)**

6. **[SEPTIEMBRE 2007] (3.5 puntos)** Una planta química fabrica dos productos A_1 y A_2 con dos materias primas M_1 y M_2. La siguiente tabla muestra los consumos (en kg) de materia prima por kg de producto fabricado, sus disponibilidades y beneficios de A_1 y A_2 (por kg):

	A_1	A_2	*Disponibilidad*
M_1	2	5	4000
M_2	2	3	4800
Beneficios (euros)	1	2	

La compañía desea determinar el número de kilos de los productos A_1 y A_2 que deben producir para maximizar sus beneficios.

Se sabe que la tabla óptima viene dada por:

	x_1	x_2	x_3^h	x_4^h	x_B
x_1	1	5/2	1/2	0	2000
x_4^h	0	-2	-1	1	800
$z_j - c_j$	0	1/2	1/2	0	

donde x_i representa los kilos de producto A_i fabricados, $i = 1, 2$.

(a) Determina todas las soluciones del problema si los beneficios son de la forma $(1, 2) + \lambda(1, 1)$, con $\lambda \geq -1$. ¿Cuál es la solución si los beneficios por kg de los productos A_1 y A_2 son de 0.5 y 1.5, respectivamente? **(1 pto)**

(b) Determina todas las soluciones del problema para valores del recurso $M_1 \in [0, 6000]$. ¿Cuál sería la solución óptima si disponemos de 5000 unidades de materia prima M_1? **(1 pto)**

(c) Formula el problema dual. Determina la solución óptima del dual a partir de la solución del primal usando holguras complementarias. **(0.75 ptos)**

(d) Nos ofrecen una partida de 500 unidades adicionales de materia prima M_1 por 300 euros. ¿Aceptarías la oferta? ¿Y una partida de 1000 unidades adicionales de M_1 por 450 euros? **(0.75 ptos)**