

INVESTIGACIÓN OPERATIVA

CURSO 2008/2009

EJERCICIOS PARA ENTREGAR

SOLUCIONES SESIÓN DE PRÁCTICAS 2

- Ejercicio 1 página 15 del cuadernillo: responder a todos los apartados.

a) Determinar el número de unidades de cada producto que deben fabricarse diariamente para maximizar el beneficio.

La formulación del problema es la siguiente (véase la sesión 1 de prácticas):

Variable -->	X1	X2	X3	X4	Direction	R. H. S.
Maximize	5	6.5	5	5.5		
C1	2	2	1.5	4	<=	180
C2	2	2.5	2	1.5	<=	230
C3	0.0667	0.0334	0.1	0.0667	<=	7
LowerBound	0	0	0	0		
UpperBound	M	M	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous		

Este problema tiene solución única dada por:

$$X^* = (0, 60, 40, 0), \quad Z^* = 590$$

10:24:55		Friday	February	19	2010		
Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1 X1	0	5,0000	0	-1,0000	at bound	-M	6,0000
2 X2	60,0000	6,5000	390,0000	0	basic	6,3261	6,6667
3 X3	40,0000	5,0000	200,0000	0	basic	4,8750	5,1429
4 X4	0	5,5000	0	-4,0000	at bound	-M	9,5000
Objective Function		(Max.) =	590,0000				
Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1 C1	180,0000	<=	180,0000	0	2,0000	178,6408	184,0000
2 C2	230,0000	<=	230,0000	0	1,0000	225,0000	231,6611
3 C3	6,0040	<=	7,0000	0,9960	0	6,0040	M

Variaciones Recursos

Es decir, debemos fabricar 60 unidades de producto 2 y 40 de producto 3, obteniendo un beneficio de 590.

b) ¿Podemos reducir la disponibilidad de materias primas?, ¿y las horas de trabajo diario?

Como la restricción primera correspondiente a las materias primas no tiene holgura, no se puede reducir su disponibilidad sin que afecte a la solución. Sin embargo, sí podremos reducir las horas de trabajo diario casi en una unidad sin variar el beneficio óptimo porque la holgura de esa restricción es 0.996.

c) Plantear y resolver el problema dual.

El problema dual viene dado por:

Variable -->	C1	C2	C3	Direction	R. H. S.
Minimize	180	230	7		
X1	2	2	0,0667	>=	5
X2	2	2,5	0,0334	>=	6,5
X3	1,5	2	0,1	>=	5
X4	4	1,5	0,0667	>=	5,5
LowerBound	0	0	0		
UpperBound	M	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous	Continuous		

La solución del dual es:

$$y^* = (2, 1, 0) \quad , \quad w^* = 590$$

12:05:32		Sunday	February	21	2010		
Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1 C1	2,0000	180,0000	360,0000	0	basic	178,6408	184,0000
2 C2	1,0000	230,0000	230,0000	0	basic	225,0000	231,6611
3 C3	0	7,0000	0	0,9960	at bound	6,0040	M
Objective	Function	(Min.) =	590,0000				
Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1 X1	6,0000	>=	5,0000	1,0000	0	-M	6,0000
2 X2	6,5000	>=	6,5000	0	60,0000	6,3261	6,6667
3 X3	5,0000	>=	5,0000	0	40,0000	4,8750	5,1429
4 X4	9,5000	>=	5,5000	4,0000	0	-M	9,5000

Obsérvese que la solución del dual (2,1,0) coincide con los precios sombra (shadow price) correspondientes al problema original (ver tabla apartado a)).

d) A partir de la solución del dual, obtener la solución del primal aplicando las condiciones de holgura complementaria.

e) Nos plantean alquilar otro almacén de 100m². ¿Resulta interesante realizar una oferta?

Observar que en este caso, aumentar el recurso “espacio” en 100 unidades NO mantiene la base óptima así que no podemos responder usando la solución del dual (precios sombra), sino que debemos resolver nuevamente el problema con el nuevo valor del recurso.

Valores del recurso "espacio" que mantienen la base óptima

10:24:55		Friday	February	19	2010		
Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1 X1	0	5,0000	0	-1,0000	at bound	-M	6,0000
2 X2	60,0000	6,5000	390,0000	0	basic	6,3261	6,6667
3 X3	40,0000	5,0000	200,0000	0	basic	4,8750	5,1429
4 X4	0	5,5000	0	-4,0000	at bound	-M	9,5000
Objective	Function	(Max.) =	590,0000				
Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1 C1	180,0000	<=	180,0000	0	2,0000	178,6408	184,0000
2 C2	230,0000	<=	230,0000	0	1,0000	225,0000	231,6611
3 C3	6,0040	<=	7,0000	0,9960	0	6,0040	M

Introduciendo el nuevo problema con el recurso 2 igual a 330 en lugar de 230 tenemos la siguiente solución:

12:11:40		Sunday	February	21	2010			
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(i)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(i)	Allowable Max. c(i)
1	X1	0	5,0000	0	-1,5555	at bound	-M	6,5555
2	X2	51,0334	6,5000	325,2168	0	basic	4,1671	6,6667
3	X3	53,2889	5,0000	266,4443	0	basic	4,8750	19,4611
4	X4	0	5,5000	0	-7,4998	at bound	-M	12,9998
	Objective Function		(Max.) =	591,6611				
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	180,0000	<=	180,0000	0	3,2221	105,0000	260,4640
2	C2	231,6611	<=	230,0000	98,3389	0	231,6611	M
3	C3	7,0000	<=	7,0000	0	1,6678	3,0060	12,0000

Observamos que el beneficio adicional que se obtiene al aumentar el espacio en 100 unidades es de sólo 1.6611, así que sólo interesa aumentar el espacio en esa cantidad si me cuesta menos de 1.6611 um.

f) Si deseamos aumentar la producción, ¿Qué resultaría más rentable aumentar las disponibilidad de trabajo diario en 1 hora más o aumentar la disponibilidad de materia prima en 2 toneladas día?

Resulta más rentable aumentar la materia prima en 2 unidades, porque esto supondría un aumento de la función objetivo de $2 \cdot y_1 = 2 \cdot 2 = 4$ um (véase solución del dual).

Sin embargo, la variable dual $y_3 = 0$ lo que significa que el aumento de las horas de trabajo NO nos supondrá un beneficio adicional.

NOTA: Observar que las variaciones que nos proponen en los recursos mantienen la base óptima.

- Para cada uno de los siguientes problemas, responder a todos los apartados:

$$P1) \max z = -x_1 - 2x_2 + 2x_3$$

s.a.

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$3x_1 + x_2 \leq 12$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$P2) \max z = -x_1 - 2x_2 + 2x_3$$

s.a.

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$3x_1 + x_2 \geq 12$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$P3) \max z = 3x_1 + x_2$$

s.a.

$$x_1 + 3x_2 \leq 7$$

$$x_1 + x_2 = 7$$

$$5x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$P4) \max z = x_1 + x_2$$

s.a.

$$x_1 + x_2 \geq 5$$

$$x_2 \geq 2$$

$$x_1 \geq 1$$

PROBLEMA P1)

- a) Formular el problema en forma estándar.

Basis	C(j)	X1	X2	X3	Slack_C1	Slack_C2	Slack_C3	R. H. S.	Ratio
Slack_C1	0	1,0000	1,0000	0	1,0000	0	0	6,0000	M
Slack_C2	0	3,0000	1,0000	0	0	1,0000	0	12,0000	M
Slack_C3	0	1,0000	1,0000	1,0000	0	0	1,0000	6,0000	6,0000
	C(j)-Z(j)	-1,0000	-2,0000	2,0000	0	0	0	0	

- b) Resolver el problema usando WinQSB.

12:28:35		Sunday	February	21	2010		
Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1 X1	0	-1,0000	0	-3,0000	at bound	-M	2,0000
2 X2	0	-2,0000	0	-4,0000	at bound	-M	2,0000
3 X3	6,0000	2,0000	12,0000	0	basic	0	M
Objective Function		(Max.) =	12,0000				
Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1 C1	0	<=	6,0000	6,0000	0	0	M
2 C2	0	<=	12,0000	12,0000	0	0	M
3 C3	6,0000	<=	6,0000	0	2,0000	0	M

- c) Indicar las matrices B y B(-1) correspondientes a la solución óptima, en caso de que exista solución.

		X1	X2	X3	Slack_C1	Slack_C2	Slack_C3	R. H. S.	Ratio
Basis	C(j)	-1,0000	-2,0000	2,0000	0	0	0		
Slack_C1	0	1,0000	1,0000	0	1,0000	0	0	6,0000	
Slack_C2	0	3,0000	1,0000	0	0	1,0000	0	12,0000	
X3	2,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0	0	1,0000	6,0000	
	C(j)-Z(j)	-3,0000	-4,0000	0	0	0	-2,0000	12,0000	

⊗ Matriz $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se obtiene mirando en las columnas de la tabla final del símplex correspondientes a las variables que formaran la base inicial, en este caso $\{ \text{Slack_C1}, \text{Slack_C2}, \text{Slack_C3} \}$

⊗ Matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- d) Formular el problema dual.

Variable -->	C1	C2	C3	Direction	R. H. S.
Minimize	6	12	6		
X1	-1	-3	-1	<=	1
X2	-1	-1	-1	<=	2
X3			1	>=	2
LowerBound	0	0	0		
UpperBound	M	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous	Continuous		

- e) Proporcionar la solución del dual a partir de la tabla final del problema primal. Comprobar que coincide con los precios sombra mostrados por WinQSB.

		X1	X2	X3	Slack_C1	Slack_C2	Slack_C3		
Basis	C(j)	-1,0000	-2,0000	2,0000	0	0	0	R. H. S.	Ratio
Slack_C1	0	1,0000	1,0000	0	1,0000	0	0	6,0000	
Slack_C2	0	3,0000	1,0000	0	0	1,0000	0	12,0000	
X3	2,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0	0	1,0000	6,0000	
	C(j)-Z(j)	-3,0000	-4,0000	0	0	0	-2,0000	12,0000	

Los valores $z_j - c_j$ correspondientes a las variables que formaban la base inicial son $(0, 0, 2)$. Como tienen coste cero (son holgas) $\Rightarrow \bar{y}^* = (0, 0, 2)$

Shadow Price
0
0
2,0000

Precios Sombra proporcionados por WinQSB $\Rightarrow \bar{y}^* = (0, 0, 2)$

- f) A partir de la solución del primal, calcular la solución del dual usando el Teorema de holgas complementarias.

- La solución óptima del primal es $\bar{x}^* = (0, 0, 6)$.
- Como $x_3^* = 6 \neq 0 \Rightarrow 3^{\text{a}}$ restricción del dual es igualdad $\Rightarrow \boxed{y_3 = 2}$
- Como la 1^a restricción del primal tiene holga $\Rightarrow \boxed{y_1 = 0}$
- Como la 2^a " " " " tiene holga $\Rightarrow \boxed{y_2 = 0}$

- g) Interpretar el significado de cada una de las variables duales.

- Además el pto $(0, 0, 2)$ es factible del Dual $\Rightarrow$ es el óptimo

g) $y_1^* = 0, y_2^* = 0 \Rightarrow$ La disponibilidad adicional de recursos 1 y 2 NO proporciona beneficio adicional.
 $y_3^* = 2 \Rightarrow$ Por cada unidad adicional de recurso 3 se obtendrán 2 unidades de beneficio adicional.

PROBLEMA P2)

h) Formular el problema en forma estándar.

Basis	C(j)	X1	X2	X3	Slack_C1	Surplus_C2	Slack_C3	Artificial_C2	R. H. S.	Ratio
Slack_C1	0	1,0000	-2,0000	2,0000	0	0	0	0	6,0000	6,0000
Artificial_C2	-M	3,0000	1,0000	0	0	-1,0000	0	1,0000	12,0000	4,0000
Slack_C3	0	1,0000	1,0000	1,0000	0	0	1,0000	0	6,0000	6,0000
C(j)-Z(j)		-1,0000	-2,0000	2,0000	0	0	0	0	0	
* Big M		3,0000	1,0000	0	0	-1,0000	0	0	0	

i) Resolver el problema usando WinQSB.

Solución única

14:50:09		Sunday	February	21	2010		
Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1 X1	4,0000	-1,0000	-4,0000	0	basic	-10,0000	2,0000
2 X2	0	-2,0000	0	-3,0000	at bound	-M	1,0000
3 X3	2,0000	2,0000	4,0000	0	basic	0	M
Objective Function	(Max.) =	0					
Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1 C1	4,0000	<=	6,0000	2,0000	0	4,0000	M
2 C2	12,0000	>=	12,0000	0	-1,0000	0	18,0000
3 C3	6,0000	<=	6,0000	0	2,0000	4,0000	M

j) Indicar las matrices B y B(-1) correspondientes a la solución óptima, en caso de que exista solución.

Basis	C(j)	X1	X2	X3	Slack_C1	Surplus_C2	Slack_C3	Artificial_C2	R. H. S.	Ratio
Slack_C1	0	0	0,6667	0	1,0000	0,3333	0	-0,3333	2,0000	
X1	-1,0000	1,0000	0,3333	0	0	-0,3333	0	0,3333	4,0000	
X3	2,0000	0	0,6667	1,0000	0	0,3333	1,0000	-0,3333	2,0000	
C(j)-Z(j)		0	-3,0000	0	0	-1,0000	-2,0000	1,0000	0	
* Big M		0	0	0	0	0	0	-1,0000	0	

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

Variables que forman la base inicial.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

Coefficientes de la tabla INICIAL para las variables que forman la BASE FINAL.

Formular el problema dual.

Variable -->	C1	C2	C3	Direction	R. H. S.
Minimize	5	12	6		
X1	-1	-3	-1	<=	1
X2	-1	-1	-1	<=	2
X3			1	>=	2
LowerBound	0	M	0		
UpperBound	M	0	M		
VariableType	Continuous	Continuous	Continuous		

l) Proporcionar la solución del dual a partir de la tabla final del problema primal. Comprobar que coincide con los precios sombra mostrados por WinQSB.

Basis	C(j)	X1	X2	X3	Slack_C1	Surplus_C2	Slack_C3	Artificial_C2	R. H. S.	Ratio
Slack_C1	0	0	0,6667	0	1,0000	0,3333	0	-0,3333	2,0000	
X1	-1,0000	1,0000	0,3333	0	0	-0,3333	0	0,3333	4,0000	
X3	2,0000	0	0,6667	1,0000	0	0,3333	1,0000	-0,3333	2,0000	
	C(j)-Z(j)	0	-3,0000	0	0	-1,0000	-2,0000	1,0000	0	
	* Big M	0	0	0	0	0	0	-1,0000	0	

$y_1^* = 0$

$y_3^* = 2$

$y_2^* = (M-1) + (-M) = -1$

Shadow Price
0
-1,0000
2,0000

⇒ coincide con los precios sombra

m) A partir de la solución del primal, calcular la solución del dual usando el Teorema de holguras complementarias.

Solución primal $\vec{x}^* = (4, 0, 2)$.

• Como $x_1^* = 4 \neq 0 \Rightarrow 1^{\text{a}}$ restricción dual igualdad

$$\Rightarrow -y_1 - 3y_2 - y_3 = 1$$

• Como $x_3^* = 2 \neq 0 \Rightarrow 3^{\text{a}}$ restricción dual igualdad

$$\Rightarrow y_3 = 2$$

• Como la 1^a restricción del primal tiene holgura $\Rightarrow$

$\Rightarrow y_1 = 0$
Luego la solución del sistema es $(0, -1, 2)$, que es factible del Dual $\Rightarrow$ Es el óptimo.

n) Interpretar el significado de cada una de las variables duales.

I dem

PROBLEMA P3)

o) Formular el problema en forma estándar.

		X1	X2	Slack_C1	Slack_C3	Artificial_C2		
Basis	C(j)	3,0000	2,0000	0	0	0	R. H. S.	Ratio
Slack_C1	0	1,0000	3,0000	1,0000	0	0	5,0000	5,0000
Artificial_C2	-M	1,0000	1,0000	0	0	1,0000	7,0000	7,0000
Slack_C3	0	5,0000	1,0000	0	1,0000	0	4,0000	0,8000
	C(j)-Z(j)	3,0000	2,0000	0	0	0	0	
	* Big M	1,0000	1,0000	0	0	0	0	

p) Resolver el problema usando WinQSB.

El problema es Infactible

q) Indicar las matrices B y B(-1) correspondientes a la solución óptima, en caso de que exista solución.

No existe solución óptima. El problema es Infactible.

r) Formular el problema dual.

Variable -->	C1	C2	C3	Direction	R. H. S.
Minimize	5	7	4		
X1	1	1	5	>=	3
X2	3	1	1	>=	2
LowerBound	0	-M	0		
UpperBound	M	M	M		
VariableType	Continuous	Unrestricted	Continuous		

El dual es No Acotado

- s) **Proporcionar la solución del dual a partir de la tabla final del problema primal. Comprobar que coincide con los precios sombra mostrados por WinQSB.**

No tiene sentido este apartado porque el primal era infactible.

- t) **A partir de la solución del primal, calcular la solución del dual usando el Teorema de holguras complementarias.**

No tiene sentido este apartado porque el primal era infactible.

- u) **Interpretar el significado de cada una de las variables duales.**

No tiene sentido este apartado porque el primal era infactible.

PROBLEMA P4)

- v) **Formular el problema en forma estándar.**

		X1	X2	Surplus_C1	Surplus_C2	Surplus_C3	Artificial_C1	Artificial_C2	Artificial_C3		
Basis	C(j)	1,0000	1,0000	0	0	0	0	0	0	R. H. S.	Ratio
Artificial_C1	-M	1,0000	1,0000	-1,0000	0	0	1,0000	0	0	5,0000	5,0000
Artificial_C2	-M	0	1,0000	0	-1,0000	0	0	1,0000	0	2,0000	M
Artificial_C3	-M	1,0000	0	0	0	-1,0000	0	0	1,0000	1,0000	1,0000
	C(j)-Z(j)	1,0000	1,0000	0	0	0	0	0	0	0	
	* Big M	2,0000	2,0000	-1,0000	-1,0000	-1,0000	0	0	0	0	

- w) **Resolver el problema usando WinQSB.**

El problema es No Acotado

- x) **Indicar las matrices B y B(-1) correspondientes a la solución óptima, en caso de que exista solución.**

No existe solución óptima. El problema es No Acotado.

- y) **Formular el problema dual.**

Variable -->	C1	C2	C3	Direction	R. H. S.
Minimize	5	2	1		
X1	1		1	>=	1
X2	1	1		>=	1
LowerBound	-M	-M	-M		
UpperBound	0	0	0		
VariableType	Continuous	Continuous	Continuous		

El dual es Infactible

z) Proporcionar la solución del dual a partir de la tabla final del problema primal. Comprobar que coincide con los precios sombra mostrados por WinQSB.

No tiene sentido este apartado porque el primal era no acotado.

aa) A partir de la solución del primal, calcular la solución del dual usando el Teorema de holguras complementarias.

No tiene sentido este apartado porque el primal era no acotado.

bb) Interpretar el significado de cada una de las variables duales.

No tiene sentido este apartado porque el primal era no acotado.