

EXAMEN I.O. PROBLEMAS

JUNIO 2010

PROBLEMA 1

- a) $x_1 = \text{"N.º de Kg de producto } P_1 \text{ a fabricar"}$
 $x_2 = \text{"N.º de Kg de producto } P_2 \text{ a fabricar"}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max } z = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.c.} \quad 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ \quad \quad x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ \quad \quad x_i \geq 0 \end{array} \right.$$

- Para calcular "b" usaremos la expresión que permite obtener " $z_3 - c_3$ " de la tabla:

$$z_3 - c_3 = 3 \times \frac{2}{3} + 2 \times b = 0 = \frac{4}{3} \Rightarrow \boxed{b = -\frac{1}{3}}$$

- Para calcular "a" usamos la expresión que permite obtener los valores $\vec{x}_B$ de la derecha de la tabla símplex:

$$\vec{x}_B = B^{-1} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = 4 \cdot \frac{2}{3} - 6 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{a = \frac{2}{3}}$$

b) Consideramos el vector de perturbaciones en los costos:

$$\vec{c}_0 = (1, -1)$$

Queremos resolver el problema para los nuevos costos:

$$\vec{c}_{\text{nuevo}} = (3, 2) + \lambda(1, -1) = (3+\lambda, 2-\lambda)$$

$$\left. \begin{array}{l} 3+\lambda \geq 0 \\ 2-\lambda \geq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \lambda \in [-3, 2] \rightarrow \text{rango de variaci3n de } \lambda \text{ que proporciona beneficios positivos}$$

			1	-1	0	0	
			3	2	0	0	
$\vec{c}_0$	$\vec{c}_B$	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$\vec{x}_B$
1	3	x_1	1	0	$2/3$	$-1/3$	$2/3$
-1	2	x_2	0	1	$-1/3$	$2/3$	$8/3$
			0	0	$4/3$	$1/3$	
			0	0	1	-1	

$$\left. \begin{array}{l} \hat{z}_3 - \hat{c}_3 = 4/3 + \lambda \geq 0 \\ \hat{z}_4 - \hat{c}_4 = 1/3 - \lambda \geq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \lambda \geq -4/3 \\ \lambda \leq 1/3 \end{array} \right\} \lambda \in [-4/3, 1/3]$$

* Para $\lambda \in [-4/3, 1/3]$, $\vec{x}^* = (2/3, 8/3)$ sol. 3ptima.

• Si hacemos $\lambda = -4/3 \Rightarrow \hat{z}_3 - \hat{c}_3 = 0 \Rightarrow$ hay soluciones m3ltiples. Aplicamos una iteraci3n del simplex (entra x_3 y sale x_1).

La nueva table es:

		1 -1 0 0				$\rightarrow$ X_B	
		3 2 0 0					
C_B	C_B	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	0	x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	1
-1	2	x_2	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	3
		$z_j - c_j$	-2	0	0	1	
		$z_j - c_j$	$-\frac{3}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	

$$\begin{aligned} \hat{z}_1 - \hat{c}_1 &= -2 + \frac{3}{2}\lambda \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \leq -\frac{4}{3} \\ \hat{z}_4 - \hat{c}_4 &= 1 - \frac{1}{2}\lambda \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \leq 2 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \hat{z}_1 - \hat{c}_1 &= -2 + \frac{3}{2}\lambda \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \leq -\frac{4}{3} \\ \hat{z}_4 - \hat{c}_4 &= 1 - \frac{1}{2}\lambda \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \leq 2 \end{aligned}} \right\} \lambda \leq -\frac{4}{3}$$

* Para $\lambda \leq -\frac{4}{3}$, $\vec{x}^* = (0, 3)$ sol. óptima.

• Si hacemos $\lambda = \frac{1}{3}$ en la 1^a tabla que obtuvimos,

se tiene $\hat{z}_4 - \hat{c}_4 = 0 \Rightarrow$ podemos aplicar el simplex

para obtener una sol. alternativa (entre x_4 y sale x_2)

La nueva tabla es:

			1	-1	0	0	$\rightarrow$ X_B
			3	2	0	0	
		VB	x_1	x_2	x_3	x_4	
1	3	x_1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	2
0	0	x_4	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	4
			0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	
			0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	

$$\begin{aligned} \hat{z}_2 - \hat{c}_2 &= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\lambda \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \geq \frac{1}{3} \\ \hat{z}_3 - \hat{c}_3 &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\lambda \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \geq -3 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \hat{z}_2 - \hat{c}_2 &= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\lambda \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \geq \frac{1}{3} \\ \hat{z}_3 - \hat{c}_3 &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\lambda \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \geq -3 \end{aligned}} \right\} \lambda \geq \frac{1}{3}$$

⊗ Para $\lambda \geq \frac{1}{3}$, $\vec{x}^* = (2, 0)$ sol. óptima.

Resumen:

• Si $\lambda \leq -\frac{4}{3} \Rightarrow \vec{x}^* = (0, 3)$ sol. óptima.

• Si $\lambda \in [-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}] \Rightarrow \vec{x}^* = (\frac{2}{3}, \frac{8}{3})$ sol. óptima

• Si $\lambda \geq \frac{1}{3} \Rightarrow \vec{x}^* = (2, 0)$ sol. óptima

Además, ~~sea~~ si $\lambda = -\frac{4}{3}$ también son soluciones los pts del segmento que une $\vec{x}^* = (0, 3)$ con $\vec{x}^* = (\frac{2}{3}, \frac{8}{3})$.

Igualmente, si $\lambda = \frac{1}{3}$, también son soluciones los pts del segmento formado por $\vec{x}^* = (\frac{2}{3}, \frac{8}{3})$ y $\vec{x}^* = (2, 0)$

c) $\vec{b}_{\text{nuevo}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ con $\lambda \in [3, 50]$.

$$\vec{x}_{B, \text{nuevo}} = B^{-1} \vec{b}_{\text{nuevo}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} - \frac{1}{3}\lambda \\ -\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\lambda \end{pmatrix}$$

$$\geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{8}{3} - \frac{1}{3}\lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda \leq 8 \\ -\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\lambda \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \geq 2 \end{cases}$$

⊗ Para $\lambda \in [2, 8]$, la base $\{x_1, x_2\}$ sigue siendo óptima

y $\vec{x}^* = (\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\lambda, -\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\lambda)$ es sol. óptima.

• Si $\lambda = 8 \Rightarrow \vec{x}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$ podemos aplicar simplex dual para obtener una base alternativa
 $\Rightarrow$ Sale x_1 y entra x_4 . La nueva table es:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$\vec{x}_B$
x_4	-3	0	-2	1	0
x_2	2	1	1	0	4

La nueva base $\{x_4, x_2\}$ tiene $B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\vec{x}_{B, \text{nuevo}} = B^{-1} \cdot \vec{b}_{\text{nuevo}} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 + \lambda \\ 4 \end{pmatrix} \geq$$

$$\geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -8 + \lambda \geq 0 \\ 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\lambda \geq 8}$$

⊗ Para $\lambda \geq 8$, la base $\{x_4, x_2\}$ se mantiene óptima
 y $\vec{x}^* = (0, 4)$ sol. óptima.

$$(d) \quad \begin{cases} \text{Min} & 4y_1 + 6y_2 \\ \text{s.t.} & 2y_1 + y_2 \geq 3 \\ & y_1 + 2y_2 \geq 2 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

La solución del primal es $\vec{x}^0 = (\frac{2}{3}, \frac{8}{3})$.

• Como $x_1 = \frac{2}{3} \neq 0 \Rightarrow$ 1ª restricción del dual es igualada

$$2y_1 + y_2 = 3$$

• Como $x_2 = \frac{8}{3} \neq 0 \Rightarrow$ 2ª restricción dual es igualada

$$y_1 + 2y_2 = 2$$

Por tanto, tenemos el sistema:

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 = 3 \\ y_1 + 2y_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{solución:} \\ \vec{y} = (\frac{4}{3}, \frac{1}{3}) \end{array}$$

Como el punto $\vec{y}^0 = (\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$ es factible del dual, el th. de holguras complementarias asegura que es la solución óptima.

e) • Si interesa adquirir reactivo prima M_1 a costo cero porque cada unidad de M_1 adicional nos reportará un ~~ben~~ beneficio adicional de $\frac{4}{3}$ (valor de $y_1^* = \frac{4}{3}$), al menos para un rango de M_1 ~~conteniendo a~~ de la forma $(4-\epsilon, 4+\epsilon)$.

• Nos ofrecen 4 unidades adicionales de $M_2 \Rightarrow$ la cantidad de M_2 es $6+4=10$. Por el apartado (c) sabemos que la sol. óptima es

$$x^* = (0, 4) \text{ con } z^* = 3 \times 0 + 2 \times 4 = 8.$$

$$z^{\text{antiguo}} = 3 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{8}{3} = \frac{22}{3}$$

Luego el beneficio adicional es de $8 - \frac{22}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow$

No nos interesa pagar 1 u.m.

PROB 2

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si decido realizar el proyecto "i"} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$i = 1, 2, 3, 4.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max } z = 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 5x_4 \\ \text{s. c.} \quad \begin{array}{l} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 12 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 5x_4 \leq 20 \\ x_3 \leq x_1 \\ x_3 \leq x_2 \\ x_4 \leq x_1 \\ x_4 \leq x_2 \\ x_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, 4 \end{array} \end{array} \right.$$

Lo resolveremos usando el algoritmo de Programación 0-1.
Necesitamos que $0 \leq c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_n$, así que
hacemos el cambio de variable:

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = x_4, \quad y_4 = x_3$$

Con el cambio, el problema se reescribe de la
siguiente forma:

$$\text{Max } z = 3y_1 + 4y_2 + 5y_3 + 6y_4$$

$$\text{s.t.} \quad 2y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_4 \leq 12$$

$$7y_1 + 8y_2 + 5y_3 + 9y_4 \leq 20$$

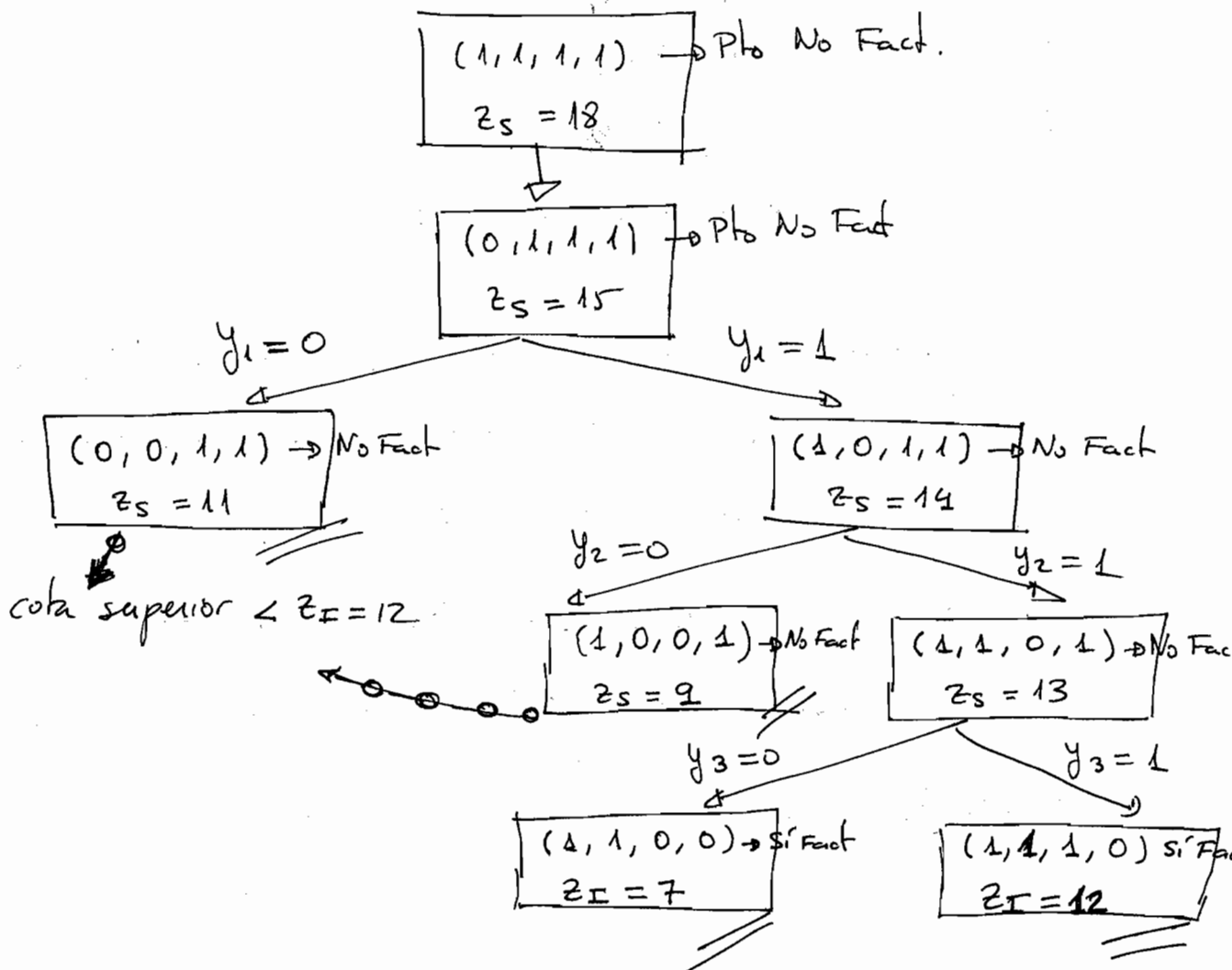
$$y_4 \leq y_1$$

$$y_4 \leq y_3$$

$$y_3 \leq y_1$$

$$y_3 \leq y_2$$

$$y_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, 4$$



(6)

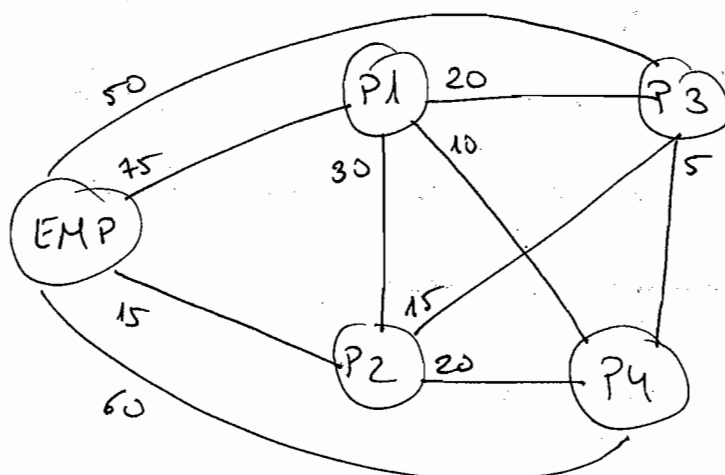
Por tanto $\vec{y}^* = (1, 1, 1, 0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{x}^* = (1, 1, 0, 1)$$

Reclutaremos los proyectos 1, 2 y 4, reportando un beneficio de ~~12~~ $z^* = 12$.

PROB 3

El grafo del problema es el siguiente:



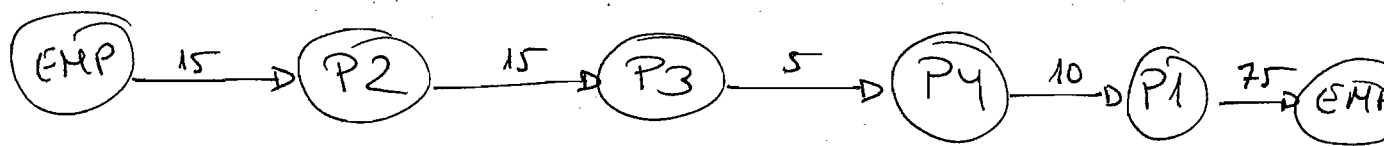
a)(i) Se trata de un problema de viajante de comercio. El método que nos proporcionaría la solución exacta es el de ramificación y acotación, porque se puede plantear como un problema 0-1.

También existen heurísticos, que proporcionan sol. aproximadas:

- Vecino más cercano
- Inserción más barata
- Bisección del ciclo

(la descripción de estos métodos se puede consultar en los apuntes)

(ii) Usaremos el heurístico del vecino más cercano por su sencillez. Este método consiste en, partiendo de la "EMPRESA", visitar siempre al vecino más cercano hasta completar el ciclo.



Distancia total recorrida = $15 + 15 + 5 + 10 + 75 = 120$ Km.

iii) Sabemos que la solución anterior (recorrer 120 Km) es una solución aproximada, pero no tiene por qué ser la óptima. Por tanto, no podemos saber si podrá realizar el trabajo sin repostar a menos que resolvamos el problema con ramificación-acotación.

b) En este caso se trata de encontrar el camino más corto desde la "EMPRESA" a cada uno de los "Ptos Limpios". Como se trata de una red no dirigida debemos usar el algoritmo de Dijkstra.

Inicialización:

$$\bullet DP_{EMP} = 0$$

$$\bullet DT_1 = 75$$

$$\bullet DT_2 = 15 \Rightarrow \boxed{DP_2 = 15}$$

$$\bullet DT_3 = 50$$

$$\bullet DT_4 = 60$$

Iteración 1:

$$\bullet DT_1 = \min \{ 75, 15 + 30 \} = 45$$

$$\bullet DT_3 = \min \{ 50, 15 + 15 \} = 30 \Rightarrow \boxed{DP_3 = 30}$$

$$\bullet DT_4 = \min \{ 60, 15 + 20 \} = 35$$

Iteración 2:

$$\bullet DT_1 = \min \{ 45, 30 + 20 \} = 45$$

$$\bullet DT_4 = \min \{ 35, 30 + 5 \} = 35 \Rightarrow \boxed{DP_4 = 35}$$

Iteración 3:

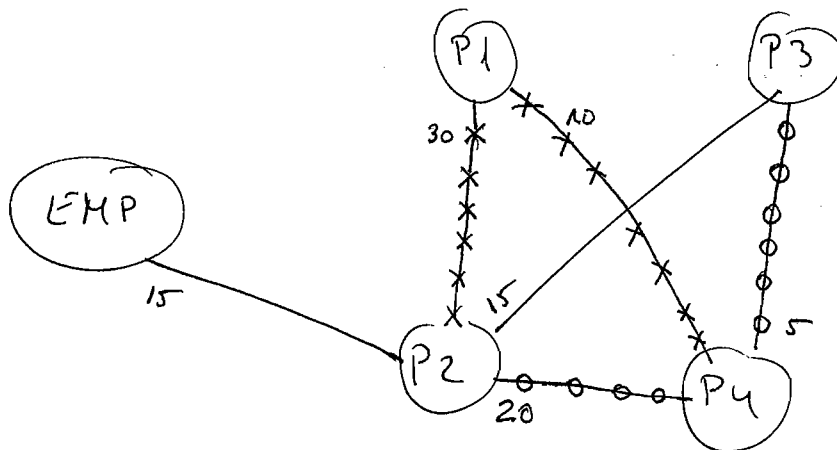
$$\bullet DP_1 = \min \{ 45, 35 + 10 \} = 45 \Rightarrow \boxed{DP_1 = 45}$$

* Como el empleado tiene que volver a la empresa después de cada recogida, la distancia total recorrida es:

$$\text{Distancia} = 2 \times (45 + 15 + 30 + 35) = 2 \times 125 = 250 \text{ Km.}$$

~~El grafo~~

El grafo solución es:



1°) EMP → P2

2°) EMP → P2 → P3

3°) EMP → P2 → P4

o bien:

EMP → P2 → P3 → P4

4°) EMP → P2 → P1

o bien:

EMP → P2 → P4 → P1