

SOLUCIONES PROBLEMAS I.O.

SEPTIEMBRE 2009

PROB 1

a) $\text{Min } w = 4000 y_1 + 4800 y_2$

s.c. $2y_1 + 2y_2 \geq 2$

$5y_1 + 3y_2 \geq 5$

$y_1, y_2 \geq 0$

Problema

Dual

b) Para encontrar una cota inferior y superior de los valores óptimos de ambos problemas bastará con encontrar un pto factible del problema primal y un pto factible del dual. Las funciones objetivo en dichos puntos factibles serán las cotas buscadas.

• El pto $\vec{x}^p = (1000, 0)$ es factible del Primal

con $z = 2 \times 1000 = 2000$

• El punto $\vec{y} = (4, 1)$ es factible del Dual
con $\vec{w} = 4000 + 4800 = 8800$

luego $2000 \leq z^* = w^* \leq 8800$

El theoreme de dualidad débil nos permite obtener dichas cotas.

(c) $\vec{x} = (2000, 0)$ solución óptima?

Aplicamos las condiciones de holgura complementaria

• Como $x_1 = 2000 \neq 0 \Rightarrow$ 1.ª restricción del dual es una igualdad

$$\boxed{2y_1 + 2y_2 = 2}$$

• Como la 2.ª restricción del primal en: el pto $\vec{x} = (2000, 0)$

$$2 \cdot 2000 < 4800 \quad (\text{desigualdad estricta})$$

entonces $\boxed{y_2 = 0}$

Por tanto, el pto que cumple las condiciones de holgura complementaria con $\vec{x} = (2000, 0)$ es el pto $\vec{y} = (4, 0)$ que además es factible del dual.

(2)

Por tanto, $\vec{x} = (2000, 0)$ sí es solución óptima del primal y el pto $\vec{y} = (1, 0)$ es sol. óptima del dual.

(d) El nuevo vector de recursos es:

$$\vec{b}_{\text{nuevo}} = \begin{pmatrix} 10000 \\ 4800 \end{pmatrix}$$

Por tanto, los nuevos valores de la derecha de la tabla son:

$$\vec{x}_B = B^{-1} \cdot \vec{b}_{\text{nuevo}} = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ -3/5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10000 \\ 4800 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2000 \\ -1200 \end{pmatrix}$$

Como nos ha salido una coordenada negativa, hemos perdido la factibilidad del punto y por tanto debemos aplicar el simplex dual para obtener la nueva solución.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$\vec{b}$ x_B
x_2	$2/5$	1	$1/5$	0	2000
x_4	$4/5$	0	$-3/5$	1	-1200
	0	0	1	0	

Aplicando el simplex dual, sale x_4 de la base y entre x_3 . La nueva tabla es:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$\rightarrow$ x_b
x_2		1	0		1600
x_3	$-4/3$	0	1	$-5/3$	2000
$z_j - c_j$					

La solución es $\vec{x}^0 = (0, 1600)$

PROB 2

Pregunta de teoría. Ver apuntes

PROB 3

$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si se decide fabricar el Modelo } i \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$

$i = 1, 2, \dots, 7.$

Formulación:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Máx } z = 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 1x_5 + 6x_6 + 1x_7 \\ \text{s. a.} \quad 5x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 2x_4 + 5x_5 + 4x_6 + 10x_7 \leq 14 \\ x_i \in \{0, 1\} \end{array} \right.$$

Se trata de un problema Mochila: todas las variables son binarias y hay una única restricción.

Para resolverlo, usaremos el algoritmo de ramificación-acotación adaptado a los problemas mochila.

- En primer lugar, calculamos los cocientes:

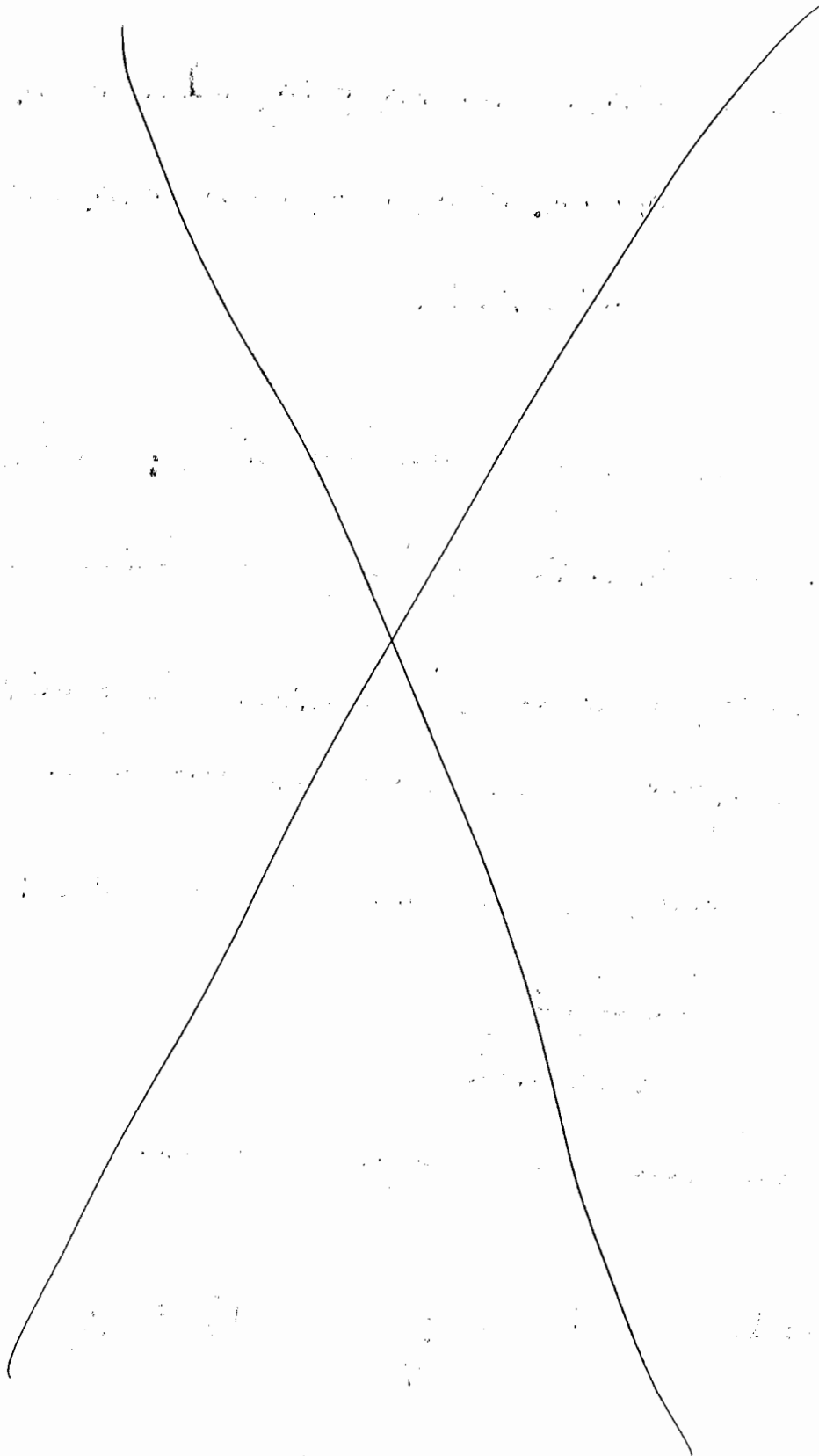
$$\frac{\text{beneficio}}{\text{inversión}}$$

y los ordenamos de mayor a menor

$$r_1 = \frac{5}{5} = 1 \quad r_2 = \frac{3}{4} \quad r_3 = \frac{7}{8}$$

$$r_4 = \frac{4}{2} = 2, \quad r_5 = \frac{1}{5}, \quad r_6 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}, \quad r_7 = \frac{1}{10}$$

$$r_4 > r_6 > r_1 > r_3 > r_2 > r_5 > r_7$$



Hacemos el cambio de variable:

$$y_1 = x_4$$

$$y_4 = x_3$$

$$y_7 = x_7$$

$$y_2 = x_6$$

$$y_5 = x_2$$

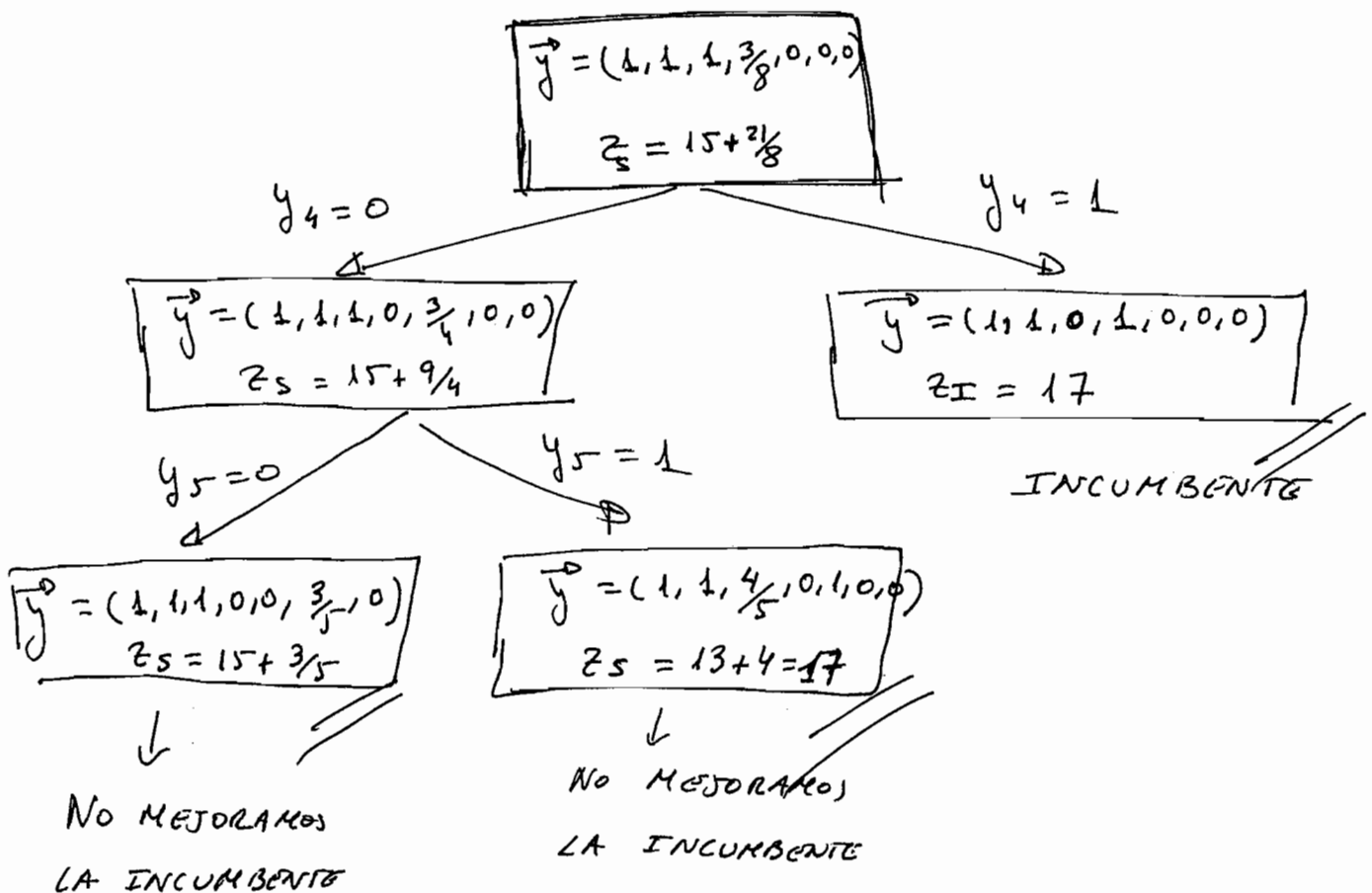
$$y_3 = x_1$$

$$y_6 = x_5$$

El problema se reescribe:

$$\begin{cases} \text{Max } z = 4y_1 + 6y_2 + 5y_3 + 7y_4 + 3y_5 + y_6 + y_7 \\ \text{s.a. } 2y_1 + 4y_2 + 5y_3 + 8y_4 + 4y_5 + 5y_6 + 10y_7 \leq 14 \\ y_i \in \{0, 1\} \quad \forall i = 1, \dots, 7 \end{cases}$$

El árbol de ramificación acotación sirve de guía



La solución óptima es:

$$\vec{y}^* = (1, 1, 0, 1, 0, 0, 0) \text{ con } z^* = 17$$

$$\Rightarrow \vec{x}^* = (0, 0, 1, 1, 0, 1, 0) \quad z^* = 17$$

Se deben fabricar los modelos 3, 4 y 6, obteniéndose un beneficio de 17 millones de euros.

PROB 4

Resuelto en Examen Septiembre 2007.