Introducción: Algunos modelos

Título de la nota 20/09/2010

Sea x una magnitud que cambia respecto del tiempo t, es decir, $x = x(t)$ (x es función de t)

La derivada de x respecto de t $\left(x'(t), \dfrac{dx}{dt}\right)$ es la <u>velocidad</u> con la que x cambia en el tiempo.

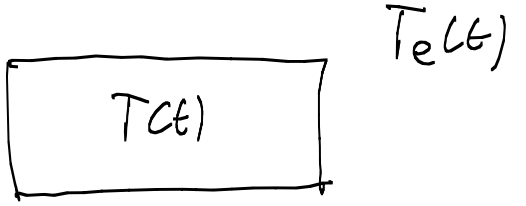
La derivada segunda de x respecto de t $\left(x''(t), \dfrac{d^2x}{dt^2}\right)$ es la <u>aceleración</u> con la que evoluciona x.

Muchas leyes físicas establecen una relación entre x, x' y x'', lo que da lugar a una ecuación diferencial.

Ejemplo 1: Temperatura en una habitación.

Sea $T = T(t)$ = temperatura en una habitación

$T_e = T_e(t)$ = temperatura exterior



$T(t)$ es la incógnita

$T_e(t)$ es un dato.

Ley de enfriamiento de Newton: la velocidad con que varía la temperatura T es proporcional a la diferencia entre dicha temperatura y la temperatura exterior.

Formulación matemática:

$$\underbrace{T'(t)}_{\text{velocidad de cambio}} = \underbrace{K}_{\text{constante de proporcionalidad}} \underbrace{(T_e(t) - T(t))}_{\text{diferencia de temperaturas}}$$

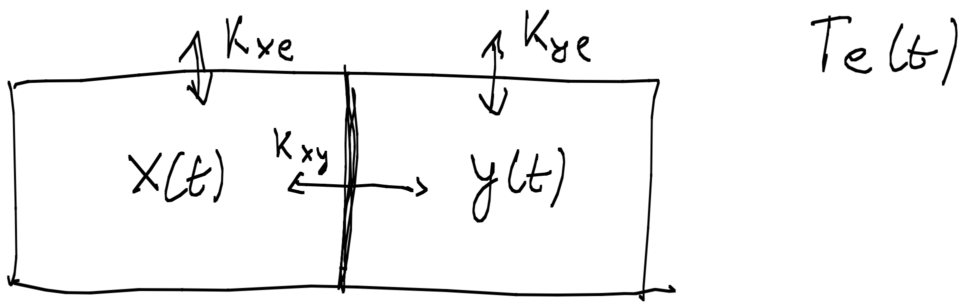
Es habitual escribir esta ecuación en la forma abreviada $T' = K(T_e(t) - T)$ (Ecuación de 1er orden)

Nota: Escribiendo la diferencia de temperaturas en este orden nos aseguramos de que $K > 0$.

Ejercicio: Si $T_e(t) = 20$, ¿cómo evoluciona la temperatura de la habitación?. ¿Sabrías hallar la expresión de T?

Ejercicio: Si medimos el tiempo en horas, y la temperatura exterior varía diariamente de manera periódica, ¿podrías dar alguna expresión matemática que modelice $T_e(t)$? ¿cómo sería ahora la temperatura $T(t)$?

Ejemplo 2: Vamos a complicar un poco el ejemplo anterior. Vamos a suponer ahora que tenemos dos habitaciones contiguas como indica la figura

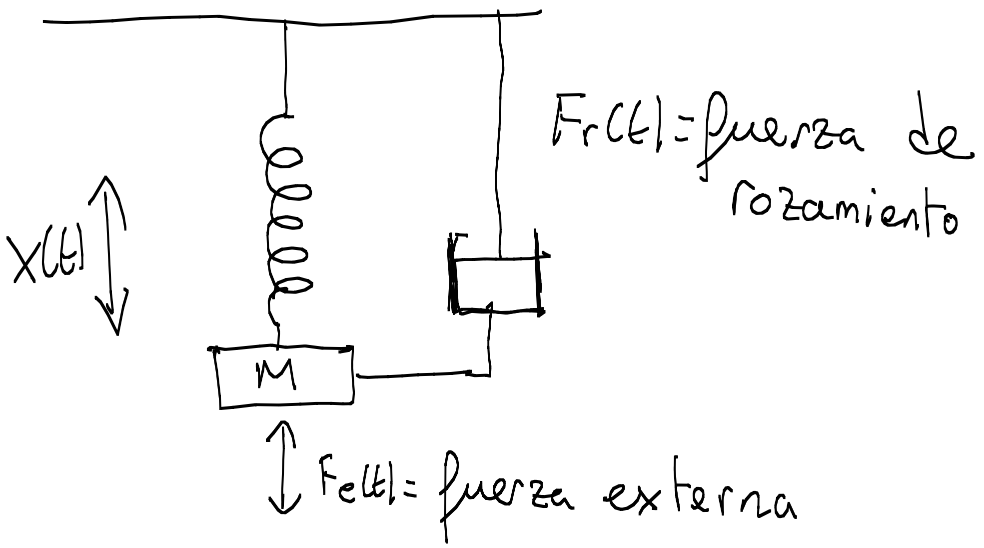


En este caso las dos habitaciones intercambian calor con el exterior y entre sí. (Las constantes de proporcionalidad correspondientes son K_{xy}, K_{xe} y K_{ye}) La ley de enfriamiento de Newton nos da el siguiente sistema diferencial

$$\begin{cases} x' = K_{xe}\,(T_e(t) - x) + K_{xy}\,(y - x) \\ y' = K_{ye}\,(T_e(t) - y) + K_{xy}\,(x - y). \end{cases}$$

Éste es un sistema de 1^{er} orden con dos ecuaciones y dos incógnitas. La generalización a un número mayor de habitaciones y con estructuras más complicadas es inmediata. Nuestro propósito será resolverlo y/o estudiar sus propiedades cualitativas más relevantes.

Ejemplo 3: Ecuación de un muelle.



Sea $x(t)$ = desplazamiento vertical de un muelle (respecto de la posición de equilibrio).

Además, tomamos el sentido $x>0$ hacia abajo.

$x'(t)$ = velocidad de la masa M

$x''(t)$ = aceleración de la masa M

Ley de Newton:

Fuerza sobre M = masa de M × aceleración

Conjunto de fuerzas que actúan

a) Fuerza recuperadora del muelle F_m

Ley de Hook: $F_m = -Kx \quad (K>0)$

(El signo − nos dice que F_m se opone a que el muelle se elongue).

b) Fuerza de rozamiento: Se supone que es proporcional a la velocidad

$$F_r = -\mu x' \quad (\mu \geq 0)$$

c) Fuerzas externas $F_e(t)$ (No depende del estado del muelle)

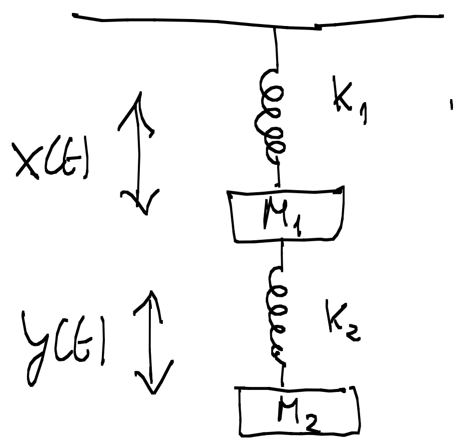
Aplicamos la ley de Newton para obtener la ecuación diferencial

$$Mx'' = -\mu x' - Kx + F_e(t),$$ es decir,

$$Mx'' + \mu x' + Kx = F_e(t)$$ | Ecuación diferencial de 2° orden

Ejercicio: ¿Cómo es el movimiento de la masa según sea el coeficiente de rozamiento, la fuerza externa....?

Ejemplo 4: Tal como hicimos en el ejemplo 2, vamos a acoplar dos muelles.



En este gráfico no hemos representado las fuerzas de rozamiento ni las externas.

De nuevo $x(t)$ e $y(t)$ son los desplazamientos verticales respecto de las posiciones de equilibrio (tomados positivos hacia abajo).

Es fácil comprobar que

elongación del 1^{er} muelle $= x(t)$

elongación del 2^{o} muelle $= y(t) - x(t)$

Sobre la masa M_1 actúan las fuerzas elásticas de los dos muelles, es decir:

Fuerza elástica sobre $M_1 = -K_1 X + K_2 (y - x)$

Sobre M_2 sólo actúa el 2^{o} muelle, por tanto:

Fuerza elástica sobre $M_2 = -K_2 (y - x)$.

Por tanto el sistema diferencial que verifican x e y es

$$\begin{cases} M_1 x'' = -K_1 x + K_2 (y - x) + \text{otras fuerzas} \\ M_2 y'' = K_2 x - K_2 y + \text{otras fuerzas} \end{cases}$$

Planteamiento general

$\mathbb{X} = X(t) =$ variable de estados

Sistema diferencial

$$X' = A\mathbb{X} + F_e(t)$$

$\mathbb{X}' =$ velocidad de cambio de $\mathbb{X}$. Puede incluir derivadas de orden superior (aceleraciones).

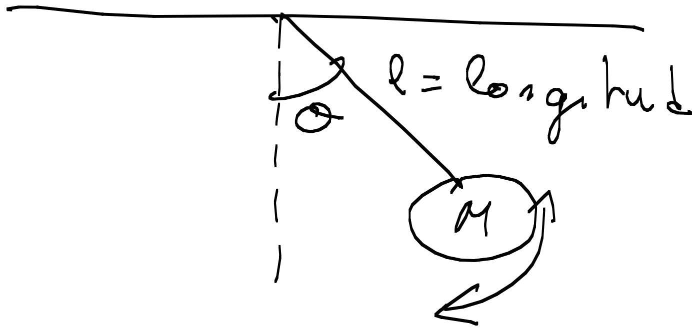
$A =$ operador <u>lineal</u> que no depende del tiempo t (multiplicar por constantes)

$F_e(t) =$ fuerzas externas (no dependen de $\mathbb{X}$).

¿Cómo se resuelve?

Notas finales

1) Algunos modelos son intrínsecamente no lineales, como el péndulo siguiente.



Ecuación $\quad \theta'' + \frac{g}{\ell} \operatorname{sen}\theta =$ otras fuerzas

$\operatorname{sen}\theta$ no es lineal en θ. La ecuación no se puede resolver de manera exacta. Sin embargo, si las oscilaciones son pequeñas, es decir, θ es pequeño, entonces $\operatorname{sen}\theta \simeq \theta$

¿por qué?

Podemos pues sustituir la anterior ecuación por $\theta'' + \frac{g}{l}\theta =$ otras fuerzas

Esta ecuación sí es lineal.

2) Hemos visto ejemplos en que la variable de estado es un conjunto finito de magnitudes. Sin embargo, pensemos por ejemplo que en el modelo de las habitaciones medimos la temperatura en cada punto de la habitación.

En tal caso $T = T(t, x)$, donde

$t =$ variable temporal
$x =$ variable espacial.

Veremos en el último tema que entonces aparece una ecuación en derivadas parciales.