

3.1 Ejercicios Trigonometría 4.1

3.1.1 Ejercicios resueltos

1. Comprobar la siguiente identidad trigonométrica curiosa:

$$tg^2(\alpha) - sen^2(\alpha) = tg^2(\alpha) \cdot sen^2(\alpha)$$

Solución:

En primer lugar desarrollaremos el primer término de la igualdad. Así:

$$\begin{aligned} tg^2(\alpha) - sen^2(\alpha) &= \frac{sen^2}{cos^2(\alpha)} - sen^2(\alpha) = \\ \frac{sen^2(\alpha) - sen^2(\alpha)cos^2(\alpha)}{cos^2(\alpha)} &= \frac{sen^2(\alpha)(1 - cos^2(\alpha))}{cos^2(\alpha)} = \\ \frac{sen^2(\alpha) \cdot \overbrace{(sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) - cos^2(\alpha))}^1}{cos^2(\alpha)} &= \frac{sen^2(\alpha) \cdot sen^2(\alpha)}{cos^2(\alpha)} = \\ &= tg^2(\alpha) \cdot sen^2(\alpha) \end{aligned}$$

2. Sabiendo que $tg(\frac{x}{2}) = \frac{1}{2}$ calcular $sen(x)$.

Solución:

Como vimos, utilizando la expresión de la tangente del ángulo doble tenemos:

$$tg(x) = tg(2\frac{x}{2}) = \frac{2tg(\frac{x}{2})}{1 - tg^2(\frac{x}{2})} = \frac{2 * \frac{1}{2}}{1 - (\frac{1}{2})^2} = \frac{4}{3}$$

Ahora bien, conocemos $tg(x)$ pero nos piden $sen(x)$. Este caso es típico, para ello partiremos de la relación fundamental:

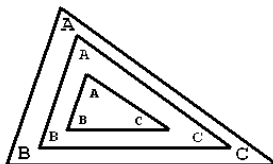
$$\begin{aligned} sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) &= 1 \Rightarrow \frac{sen^2(x)}{sen^2(x)} + \frac{cos^2(x)}{sen^2(x)} = \frac{1}{sen^2(x)} \\ 1 + \frac{1}{tg^2(x)} &= \frac{1}{sen^2(x)} \Rightarrow 1 + \frac{1}{(4/3)^2} = \frac{1}{sen^2(x)} \\ sen^2(x) &= \frac{16}{25} \Rightarrow sen(x) = \pm \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Notar que tenemos dos valores (uno positivo y otro negativo) ya que la tangente es positiva en el primer y tercer cuadrante, pero no así en seno.

3. Conocidos los tres ángulos de un triángulo es posible resolver el triángulo?

Solución:

La respuesta a esta cuestión es negativa, ya que existen infinitos triángulos semejantes a uno dado con idénticos ángulos.

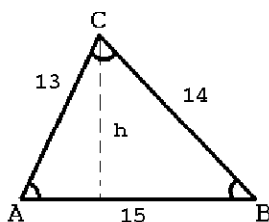


Lo que si sabremos es que los lados de todos ellos serán proporcionales.

4. Los lados de un triángulo miden respectivamente 13, 14 y 15 cm. Hallar sus ángulos así como es área del triángulo.

Solución:

A partir de los datos del problema debemos encontrar los valores de los ángulos.



Como nos dan sus tres lados podemos aplicar el teorema del coseno, de donde:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos(C) \\ 15^2 &= 13^2 + 14^2 - 2 * 13 * 14 * \cos(C) \\ \cos(C) &= \frac{13^2 + 14^2 - 15^2}{2 * 13 * 14} \Rightarrow C = \arccos(0.3846) = 1.176 \text{ rad.} \end{aligned}$$

Análogamente:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos(A) \Rightarrow \cos(A) = \frac{15^2 + 13^2 - 14^2}{2 * 13 * 15} \\ A &= \arccos(0.508) = 1.038 \text{ rad} \end{aligned}$$

Utilizando que la suma de los ángulos ha de ser π rad, tenemos:

$$B = \pi - 1.038 - 1.176 = 0.927$$

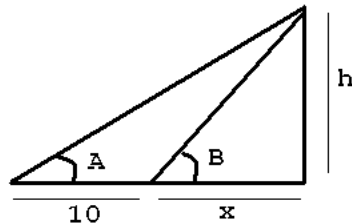
Por otro lado para calcular el área debemos notar que, por ejemplo:

$$\text{sen}(A) = \frac{h}{13} \Rightarrow h = 13 * \sin(1.038) = 11.198$$

de donde:

$$\text{area} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{15 * 11.198}{2} = 83.985 \text{ cm}^2$$

5. Encontrar el valor de x y h a partir de los datos que se nos indican en el siguiente dibujo, sabiendo que $A = \pi/6$ y $B = \pi/3$.



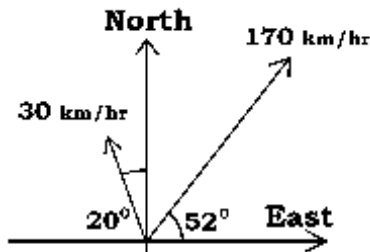
Solución:

A partir de las tangentes de los ángulos A y B obtenemos:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(A) = \frac{h}{10+x} \\ \operatorname{tg}(B) = \frac{h}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}(\pi/6) = \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \operatorname{tg}(\pi/3) = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{h}{10+x} \\ \sqrt{3} = \frac{h}{x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h = 5\sqrt{3} \text{ unidades} \\ x = 5 \text{ unidades} \end{cases}$$

6. Un aeroplano vuela a 170 km/s hacia el nordeste, en una dirección que forma un ángulo de 52° con la dirección este. El viento está soplando a 30 km/h en la dirección noroeste, formando un ángulo de 20° con la dirección norte. ¿Cuál es la "velocidad con respecto a tierra" real del aeroplano y cuál es el ángulo A entre la ruta real del aeroplano y la dirección este?



Solución:

Indiquemos la velocidad del aeroplano relativa al aire como V , la velocidad del viento relativa a tierra como W , y la velocidad del aeroplano relativa a tierra $U=V+W$.

Para ejecutar la suma real cada vector debe descomponerse en sus componentes. Por tanto obtenemos:

$$V_x = 170\cos(52^\circ) = 104.6 \quad V_y = 170\operatorname{sen}(52^\circ) = 133.96$$

$$W_x = -30\operatorname{sen}(20^\circ) = -10.26 \quad W_y = 30\cos(20^\circ) = 28.19$$

de donde:

$$U_x = 94.4 \quad U_y = 162.15$$

Entonces, por el teorema de Pitágoras, dado que

$$U^2 = Ux^2 + Uy^2 \Rightarrow U = 187.63 \text{ km/h}$$

Por otro lado

$$\cos(A) = \frac{U_x}{U} = 0.503125 \Rightarrow A = \arccos(0.503125) = 1.0436 \text{ rad} = 59.8^\circ$$

3.1.2 Ejercicios propuestos

1. Calcular todos los ángulos $\alpha \in [0, 2\pi]$ tales que $2 \cdot \cos(\alpha) = 3 \cdot \text{tg}(\alpha)$ (**sol:** $\alpha = \pi/6$, $\alpha = 5\pi/6$)
2. Si α y β son ángulos comprendidos entre 0 y 2π radianes. ¿Qué relación hay entre ellos si se verifica que $\text{sen}(\alpha) = -\text{sen}(\beta)$ y $\cos(\alpha) = \cos(\beta)$? (**sol:** $\beta = -\alpha$).
3. ¿Qué relación existe entre las razones trigonométricas de $(\pi/4 - \alpha)$ y $(\pi/4 + \alpha)$? (**sol:** Al ser complementarios $\text{sen}(\pi/4 - \alpha) = \cos(\pi/4 + \alpha)$ y viceversa).
4. Sabiendo que $\cos(\alpha) = 1/3$ y que $\alpha \in [0, \pi/2]$ determinar $\cos(\pi/2 - \alpha)$, $\text{sen}(3\pi/2 + \alpha)$ y $\text{tg}(\pi - \alpha)$ (**sol:** $\cos(\pi/2 - \alpha) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\text{sen}(3\pi/2 + \alpha) = -1/3$; $\text{tg}(\pi - \alpha) = 2\sqrt{2}$).
5. Sabiendo que $\cos(\alpha) = 3/5$ y que $\alpha \in [3\pi/2, 2\pi]$ determinar $\text{sen}(\alpha)$, $\text{tg}(\alpha)$ y $\cos(\alpha/2)$ (**sol:** $\text{sen}(\alpha) = -4/5$; $\text{tg}(\alpha) = -4/3$; $\cos(\alpha/2) = -2/\sqrt{5}$).
6. Comprobar que las siguientes expresiones no dependen del valor de α y determinar su valor:

$$\text{sen}(\alpha) \cos(\pi/4 - \alpha) - \cos(\alpha) \cos(\pi/4 + \alpha) \quad (\text{sol: } \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$\cos(\alpha) \cos(\pi/6 + \alpha) + \text{sen}(\alpha) \cos(\pi/3 - \alpha) \quad (\text{sol: } \frac{\sqrt{3}}{2})$$

7. Demostrar las identidades:

$$\begin{array}{ll} a) \cos(\alpha) = \text{sen}(\alpha + \pi/2) & b) 1 + \cot^2(\alpha) = \text{csc}^2(\alpha) \\ c) \sec^2(\alpha) = 1 + \text{tg}^2(\alpha) & d) \text{tg}(\alpha) + \cot(\alpha) = \sec(\alpha) \cdot \text{csc}(\alpha) \end{array}$$

8. Sabiendo que $\text{tg}(\alpha) = 2$ y que $4 \cdot \text{sen}(\alpha) \cos(\beta) = \cos(\alpha - \beta)$ hallar $\text{tg}(\beta)$ (**sol:** $\text{tg}(\beta) = 7/2$).
9. Resolver la siguiente ecuación trigonométrica:

$$2 \cdot \cos(x) = 3 \cdot \text{tg}(x) \quad (\text{sol: } x = \pi/6 + 2k\pi; x = 5\pi/6 + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}))$$

10. Resolver la siguiente ecuación trigonométrica sabiendo que $x \in [0, 2\pi]$:

$$3\text{sen}(2x) \cdot \cos(x) = 2\text{sen}^3(x) \quad (\text{sol: } x = 0, \pi, \pi/6 \text{ ó } 7\pi/6 \text{ rad})$$

11. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones sabiendo que x e $y \in [0, 2\pi]$:

$$\begin{cases} \sin(x) + \cos(y) = \sqrt{2} \\ x + y = \pi/2 \end{cases} \quad (\text{sol: } x=y=\pi/4; x=3\pi/4, y=-\pi/4)$$

12. Resolver, si es posible, los siguientes triángulos:

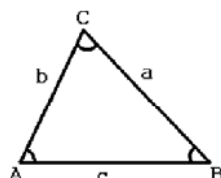
a) $a = 100\text{cm}, B = 47^\circ, C = 63^\circ$ (sol: $b = 77.82\text{cm}, c = 94.81\text{cm}, A = 70^\circ$)

b) $A = \pi/3, B = \pi/2, C = \pi/6$ (sol: *Infinitos triángulos*)

c) $a = 25\text{ cm}, b = 30\text{cm}, c = 40\text{cm}$ (sol: $A = 0.67\text{rad}, B = 0.85\text{rad}, C = 1.62\text{rad}$)

d) $b = 6\text{cm}, c = 8\text{ cm}, C = 57^\circ$ (sol: $a = 9.48\text{cm}, A = 84.03^\circ, B = 38.97^\circ$)

donde:



13. Sean A y B los ángulos no rectos de un triángulo rectángulo. Probar que:

(a) $\text{sen}^2(A) + \text{sen}^2(B) = 1$

(b) $\text{tg}(A) \cdot \text{tg}(B) = 1$

14. Sean A, B y C los ángulos de un triángulo cualesquiera. Probar que

(a) $\text{sen}(A) = \text{sen}(B + C)$

(b) $\text{cos}(A) + \text{cos}(B + C) = 0$

15. Los lados de un paralelogramo miden 6 y 8 cm respectivamente y forman un ángulo de 0.5 rad. Calcular la medida de sus diagonales (sol: 13.46 cm y 4.31 cm).

16. Se desea calcular la distancia entre dos puntos A y B de un terreno llano que no son accesibles. Para ello, se toman dos puntos accesibles del terreno C y D y se determinan las distancias y ángulos siguientes:

$$CD = 300\text{m} \quad \alpha = ACD = 85^\circ \quad \beta = BDC = 75^\circ \\ \alpha' = BCD = 40^\circ \quad \beta' = ADC = 35^\circ$$

Calcular la distancia de A a B (sol: **227.7 m**)

4.1 Tema 4.5 Complejos

Ejemplo: Efectúa $\frac{i}{3+i}$, $\frac{1+i^7}{1-i}$ y $\frac{1+3i-i(2-i)}{1+3i}$

$$\frac{i}{3+i} = \frac{i}{3+i} \frac{3-i}{3-i} = \frac{3i-i^2}{3^2-i^2} = \frac{3i-(-1)}{9-(-1)} = \frac{3i+1}{9+1} = \frac{1}{10} + \frac{3}{10}i$$

Observemos que:

$$i^0 = 1, i = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, i^6 = -1, i^7 = -i, \dots$$

$$\frac{1+i^7}{1-i} = \frac{1-i}{1-i} = 1$$

$$\begin{aligned} \frac{1+3i-i(2-i)}{1+3i} &= \frac{1+3i-2i+i^2}{1+3i} = \frac{1+i-1}{1+3i} = \frac{i}{1+3i} = \\ &= \frac{i}{1+3i} \frac{1-3i}{1-3i} = \frac{i-3i^2}{1^2-3^2i^2} = \frac{i+3}{1+9} = \frac{3}{10} + i\frac{1}{10} \end{aligned}$$

Ejemplo: Resuelve la ecuación $x^2 - 2x + 2 = 0$

$$\begin{aligned} x &= \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-1}\sqrt{4}}{2} = \\ &= \frac{2(1 \pm \sqrt{-1})}{2} = 1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm i \end{aligned}$$

Ejemplo: Comprueba que la suma $z + \frac{1}{z}$ nunca puede ser imaginario puro, salvo que z también lo sea.

$$\text{Sea } z = x + iy \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}i$$

$$z + \frac{1}{z} = x + iy + \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}i = x + \frac{x}{x^2 + y^2} + i\left(y - \frac{y}{x^2 + y^2}\right)$$

para que sea imaginario puro, tiene que ser:

$$x + \frac{x}{x^2 + y^2} = 0 = x\left(1 + \frac{1}{x^2 + y^2}\right) \Leftrightarrow x = 0$$

Ejemplo: ¿Qué condiciones tiene que cumplir z para que $z + \frac{1}{z}$ sea real?

$$z + \frac{1}{z} = x + iy + \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}i = x + \frac{x}{x^2 + y^2} + i\left(y - \frac{y}{x^2 + y^2}\right)$$

para que sea un número real, tiene que verificar:

$$y - \frac{y}{x^2 + y^2} = 0 = y \left(1 - \frac{1}{x^2 + y^2} \right) \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 1 - \frac{1}{x^2 + y^2} = 0 \Rightarrow 1 = x^2 + y^2 \end{cases}$$

o z es un número real o bien su afijo se encuentra sobre la circunferencia unidad de centro $(0, 0)$.

Ejemplo: Dado el polinomio $x^2 + 3x + 1 = p(x)$, demuestra que $p(z) = p(\bar{z})$ cualesquiera que sean los z para los que $p(z) \in \mathbb{R}$

Sea $z = a + bi$, por las propiedades de la conjugación, sabemos que $p(\bar{z}) = \overline{p(z)} = p(z) \Leftrightarrow p(z) \in \mathbb{R}$, luego, $(a + bi)^2 + 3(a + bi) + 1 \in \mathbb{R}$

$$a^2 - b^2 + 2abi + 3a + 3bi + 1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2ab + 3b = 0$$

Ejemplo: Calcula el producto $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \dots \cdot i^{100}$ y la suma $i + i^2 + i^3 + \dots + i^{100}$.

$$i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \dots \cdot i^{100} = i^{1+2+\dots+100} = i^{5050} = i^{2+4+1262} = i^2 \cdot (i^4)^{1262} = i^2 = -1$$

$$i + i^2 + i^3 + \dots + i^{100} = \frac{i \cdot i^{100} - i}{i - 1} = \frac{i - i}{i - 1} = 0$$

Ejemplo: Representa en el plano complejo los números que verifican:

1. $z + \bar{z} = \frac{1}{2}$
2. $z - \bar{z} = \frac{1}{2}i$

Solución.-

1. $z + \bar{z} = \frac{1}{2} \Rightarrow x + iy + x - iy = 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$
2. $z - \bar{z} = \frac{1}{2}i \Rightarrow x + iy - (x - iy) = 2yi = \frac{1}{2}i \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}$

Ejemplo: Describe el conjunto de puntos z tal que:

1. $\operatorname{Re}(z) = 0$; $\operatorname{Re}(z) > 0$; $|z| = 1$; $|z| > 1$; $\operatorname{Im}(z) = 1$; $\operatorname{Im}(z) < 1$; $1 < |z| < 2$.
2. $|z - 1| = 2$; $|z - 1| < 2$; $|z - 1| = |z + 1|$
3. $|\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)| = 1$; $|z - 2| = \operatorname{Re}(z) + 2$; $|z - 5| - |z + 5| = 6$; $|z - 3| + |z + 3| = 8$

Solución.-

1. Si $z = x + iy \Rightarrow \operatorname{Re}(z) = x = 0$ que representa una recta, el eje de ordenadas; $\operatorname{Re}(z) = x > 0$ es un semiplano. $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$ circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 1. $1 < |z| < 2$ es una corona circular de radios 1 y 2 respectivamente.

2. $|z - 1| = 2$ es la circunferencia de centro $(1, 0)$ y radio 2. $|z - 1| < 2$ el círculo de centro $(1, 0)$ y radio 2. $|z - 1| = |z + 1|$ es el lugar geométrico de puntos del plano que equidistan de los puntos $(1, 0)$ y $(-1, 0)$, es decir, la mediatriz de ese segmento.
3. $|\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)| = 1 = |x| + |y|$ es un cuadrilátero de vértices $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ y $(0, -1)$. $|z - 5| - |z + 5| = 6$ lugar geométrico de puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos (llamados focos $(5, 0)$ y $(-5, 0)$) es constante, es decir, una hipérbola. $|z - 3| + |z + 3| = 8$ es el lugar geométrico de puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos (llamados focos) $(3, 0)$ y $(-3, 0)$ es constante, es decir, una elipse. $|z - 2| = \operatorname{Re}(z) + 2$ lugar geométrico de puntos del plano equidistantes de un punto fijo y una recta, es decir, una parábola.

Ejemplo: Resolver la ecuación $z^3 = 1$.

$$1 = 1_0 \Rightarrow (x_\phi)^3 = x_{3\phi}^3 = 1_0 \Rightarrow \begin{cases} x^3 = 1 \\ 3\phi = 0 + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \phi = \frac{2k\pi}{3}; k = 0, 1, 2 \end{cases}$$

las soluciones son:

$$1_0, 1_{\frac{2\pi}{3}}, 1_{\frac{4\pi}{3}}$$

observemos que

$$1_0 = 1, 1_{\frac{2\pi}{3}} = 1e^{\frac{2\pi}{3}i} = e^{\frac{2\pi}{3}i} = w, 1_{\frac{4\pi}{3}} = 1e^{\frac{4\pi}{3}i} = e^{\frac{4\pi}{3}i} = \left(e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)^2 = w^2$$

verificándose que $1 + w + w^2 = 0$ y que $w^3 = 1 \Rightarrow w^2 = \frac{1}{w} = \frac{\bar{w}}{w\bar{w}} = \bar{w}$.

Veamos un ejemplo donde se hace uso de estas propiedades.

Ejemplo: Demostrar que para cualquier número natural n el polinomio $(x + 1)^{6n+1} - x^{6n+1} - 1$ es divisible por $(x^2 + x + 1)^2$.

Vamos a demostrar que las raíces de $(x^2 + x + 1)^2$ dividen a $(x + 1)^{6n+1} - x^{6n+1} - 1$ con lo que estará probado.

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = x^3 - 1$$

luego las raíces de $x^2 + x + 1$ son las raíces complejas de $z^3 = 1$, es decir, w y $\bar{w} = w^2 = \frac{1}{w}$, y las raíces de $(x^2 + x + 1)^2$ son w^2 y $w^4 = w^3w = w$.

$$(w + 1)^{6n+1} - w^{6n+1} - 1 = \{w + 1 = -w^2\} = (-w^2)^{6n+1} - w^{6n+1} - 1$$

y al ser

$$\begin{aligned} (-w^2)^{6n+1} &= -w^{12n+2} = -w^{12n}w^2 = -[w^3]^{4n}w^2 = -w^2 \\ w^{6n+1} &= (w^3)^{2n}w = w \end{aligned}$$

de donde

$$(w + 1)^{6n+1} - w^{6n+1} - 1 = -w^2 - w - 1 = 0$$

Análogamente procedemos con la otra raíz, w^2 .

Ejemplo: La fórmula de Moivre nos sirve para realizar cálculos trigonométricos, por ejemplo, expresar $\sin 2a$, $\cos 3a$, $\cos 4a$, \dots , $\cos^2 a$, $\cos^3 a$, \dots

En efecto, aplicando la citada fórmula, podemos escribir:

$$(\cos a + i \sin a)^n = \cos na + i \sin na$$

y sólo tenemos que desarrollar por la fórmula del binomio el primer término.

Así tendremos, por ejemplo, para $n = 2$

$$\begin{aligned} (\cos a + i \sin a)^2 &= \cos 2a + i \sin 2a \\ \cos^2 a + 2i \cos a \sin a + i^2 \sin^2 a &= \cos 2a + i \sin 2a \\ \cos^2 a - \sin^2 a + 2i \cos a \sin a &= \cos 2a + i \sin 2a \Rightarrow \begin{cases} \cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a \\ 2 \cos a \sin a = \sin 2a \end{cases} \\ \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) &= \cos 2a \Rightarrow \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \text{ y } \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} \end{aligned}$$

También podemos obtener el seno de una suma o diferencia a partir de la fórmula de Euler:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{ia} \cdot e^{ib} = e^{i(a+b)} = \cos(a+b) + i \sin(a+b)$$

pero, por otra parte:

$$(\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b + i(\cos a \sin b + \sin a \cos b)$$

igualando las partes reales e imaginarias obtenemos:

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a+b) &= \cos a \sin b + \sin a \cos b \end{aligned}$$

Las transformaciones de productos de senos y/o cosenos, son muy útiles en el cálculo de primitivas, veamos un procedimiento sencillo basado en la fórmula de Euler.

Ejemplo: Transformar $\sin x \sin 2x$ en sumas de senos y/o cosenos.

Sea $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, y $e^{-ix} = e^{i(-x)} = \cos(-x) + i \sin(-x) = \cos x - i \sin x$.

Sumando y restando, obtenemos:

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{aligned}$$

de donde,

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \\ \sin 2x &= \frac{e^{i2x} - e^{-i2x}}{2i} \end{aligned}$$

y multiplicando

$$\begin{aligned}\sin x \sin 2x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \frac{e^{i2x} - e^{-i2x}}{2i} = \frac{1}{-4} (e^{3ix} - e^{-ix} - e^{ix} + e^{-3ix}) = \\ &= \frac{1}{-4} [(e^{3ix} + e^{-3ix}) - (e^{ix} + e^{-ix})] = -\frac{1}{2} \left[\frac{(e^{3ix} + e^{-3ix})}{2} - \frac{(e^{ix} + e^{-ix})}{2} \right] = \\ &= -\frac{1}{2} [\cos 3x - \cos x]\end{aligned}$$

Ejercicios

Ejemplo: Hallar $z = \frac{(1+i)^{100}}{(\sqrt{1-i})^{50}}$

$$z = \frac{(1+i)^{100}}{(\sqrt{1-i})^{50}} = z = \frac{(1+i)^{100}}{(1-i)^{25}}$$

Pasamos los número complejos a su forma polar

$$\begin{aligned}z_0 &= 1 + i \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \arg(z_0) = \arctan \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4} \\ |z_0| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \end{array} \right\} \Rightarrow z_0 = \sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}} \Rightarrow z_0^{100} = \sqrt{2}_{100\frac{\pi}{4}}^{100} = 2^{50}_{25\pi} \\ z_1 &= 1 - i \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \arg(z_0) = \arctan \frac{-1}{1} = -\frac{1}{4}\pi \\ |z_1| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \end{array} \right\} \Rightarrow z_1 = \sqrt{2}_{-\frac{\pi}{4}} \Rightarrow z_1^{100} = \sqrt{2}_{-25\frac{\pi}{4}}^{25} \\ z &= \frac{2^{50}_{25\pi}}{\sqrt{2}_{-25\frac{\pi}{4}}^{25}} = \sqrt{2}_{75\frac{\pi}{4}}^{75} = \sqrt{2}_{3\pi}^{75} = 2^{37} \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = 2^{37} \sqrt{2} (-1 + i)\end{aligned}$$

Ejemplo: Calcular $f(n) = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n$ para $n = 1, 2, 3, 4$ y probar que $f(n+4) = -f(n)$ ($n > 0$ entero)

$$\begin{aligned}f(n) &= \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n = (e^{\frac{\pi}{4}i})^n + (e^{-\frac{\pi}{4}i})^n = e^{\frac{n\pi}{4}i} + e^{-\frac{n\pi}{4}i} = \\ &= \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \cos\left(-\frac{n\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{n\pi}{4}\right) = \\ &= \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - i \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) = 2 \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}f(1) &= 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \\ f(2) &= 2 \cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) = 0 \\ f(3) &= 2 \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$f(4) = 2 \cos\left(\frac{4\pi}{4}\right) = -2$$

$$f(n+4) = 2 \cos\left(\frac{(n+4)\pi}{4}\right) = 2 \cos\left(\frac{n\pi}{4} + \pi\right) = -2 \cos\frac{n\pi}{4} = f(n)$$

Ejemplo: Girar 45° el vector $z = 3 + 4i$ y extenderlo el doble.

Girar una figura o un vector 45° , equivale a multiplicarlo por el número complejo $z = 1_{45^\circ} = 1_{\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{2}$ y para extenderlo el doble basta con multiplicar por 2.

$$(3 + 4i) \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{2}\right) 2 = -\sqrt{2} + 7i\sqrt{2}$$

Ejemplo: Calcular la suma $\cos a + \cos 2a + \cos 3a + \dots + \cos na$
Consideramos

$$\begin{aligned} z &= \cos a + \cos 2a + \cos 3a + \dots + \cos na + i(\sin a + \sin 2a + \dots + \sin na) = \\ &= \cos a + i \sin a + \cos 2a + i \sin 2a + \dots + \cos na + i \sin na = \\ &= e^{ia} + e^{i2a} + \dots + e^{ina} = \left\{ \begin{array}{l} \text{suma de n términos de} \\ \text{una progresión geométrica} \end{array} \right\} = \frac{e^{ina}e^{ia} - e^{ia}}{e^{ia} - 1} = \\ &= e^{ia} \frac{e^{ina} - 1}{e^{ia} - 1} = e^{ia} \frac{\cos na + i \sin na - 1}{\cos a + i \sin a - 1} = e^{ia} \frac{-1 + \cos na + i \sin na}{-1 + \cos a + i \sin a} = \\ &= e^{ia} \frac{-\sin^2 \frac{na}{2} + i2 \sin \frac{na}{2} \cos \frac{na}{2}}{-\sin^2 \frac{a}{2} + i2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}} = e^{ia} \frac{\sin \frac{na}{2}}{\sin \frac{a}{2}} \cdot \frac{-\sin \frac{na}{2} + i2 \cos \frac{na}{2}}{-\sin \frac{a}{2} + i2 \cos \frac{a}{2}} = \\ &= e^{ia} \frac{\sin \frac{na}{2}}{\sin \frac{a}{2}} \cdot \frac{-i \sin \frac{na}{2} + i^2 2 \cos \frac{na}{2}}{-i \sin \frac{a}{2} + i^2 2 \cos \frac{a}{2}} = e^{ia} \frac{\sin \frac{na}{2}}{\sin \frac{a}{2}} \cdot \frac{-\sin \frac{na}{2} - 2 \cos \frac{na}{2}}{-\sin \frac{a}{2} - 2 \cos \frac{a}{2}} = \\ &= e^{ia} \frac{\sin \frac{na}{2}}{\sin \frac{a}{2}} \cdot e^{i(\frac{na}{2} - \frac{a}{2})} = \frac{\sin \frac{na}{2}}{\sin \frac{a}{2}} \cdot e^{i(\frac{na}{2} + \frac{a}{2})} = \frac{\sin \frac{na}{2}}{\sin \frac{a}{2}} \cdot e^{i\frac{(n+1)a}{2}} = \\ &= \frac{\sin \frac{na}{2}}{\sin \frac{a}{2}} \cdot \left(\cos \frac{n+1}{2}a + i \sin \frac{n+1}{2}a \right) \end{aligned}$$

de donde, igualando la parte real y la imaginaria, tendremos:

$$\cos a + \cos 2a + \cos 3a + \dots + \cos na = \frac{\sin \frac{na}{2}}{\sin \frac{a}{2}} \cdot \cos \frac{n+1}{2}a$$

$$\sin a + \sin 2a + \sin 3a + \dots + \sin na = \frac{\sin \frac{na}{2}}{\sin \frac{a}{2}} \cdot \sin \frac{n+1}{2}a$$

Ejercicio: Demostrar las fórmulas de Moivre:

$$1 + \cos \frac{2\pi}{n} + \cos \frac{4\pi}{n} + \dots + \cos \frac{2(n-1)\pi}{n} = 0$$

$$\sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{4\pi}{n} + \dots + \sin \frac{2(n-1)\pi}{n} = 0$$

Ejercicio: Hallar las raíces de la ecuación $(1 + i)z^3 - 2i = 0$

Ejercicio: Escribir en forma binómica $e^{\sqrt{i}}$.

Ejercicio: Resolver la ecuación $z^4 - 16 = 0$.

Ejercicio: Resolver la ecuación $z^4 + 16 = 0$.

Ejercicio: Resolver la ecuación $(z + 1)^3 + i(z - 1)^3 = 0$.