Universidad Politécnica de Cartagena

Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

Problemas de Álgebra

Álgebras de Boole

1. Si $K = \{1, 3, 6, 12\}$ y $x, y \in K$ definimos $x + y = \text{m.c.m}(x, y)$ y $x \cdot y = \text{m.c.d}(x, y)$.

(i) Probar que $+$ y $\cdot$ son LCI en K.

(ii) Encontrar los elementos neutros de las LCI anteriores.

(iii) Probar que $(K, +, \cdot)$ no es un álgebra de Boole.

2. Sea $(K, +, \cdot)$ un álgebra de Boole y $x, y \in K$. Demostrar:

(i) Si $x + y = 0 \Rightarrow x = 0$ e $y = 0$.

(ii) Si $x \cdot y = 1 \Rightarrow x = 1$ e $y = 1$.

3. Demuestra que si X es un conjunto finito entonces $|\mathbb{P}(X)| = 2^{|X|}$. (**Ayuda:** Utiliza la fórmula del Binomio de Newton: Si $a, b \in \mathbb{R}$ entonces se tiene que $(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} a \cdot b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$.)

4. Sea $(K, \cdot, +)$ es un álgebra de Boole y supongamos que $|K|$ es finito. Probar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|K| = 2^n$. **Ayuda:** Puede ser útil el problema anterior.

5. Consideramos el álgebra de Boole $(\mathbb{P}(L), \cup, \cap)$ donde $L = \{a, b, c, d\}$.

(i) Encuentra sus elementos minimales.

(ii) Si $A = \{b, c\}, B = \{a, c, d\}, C = \emptyset$ y f es una función booleana de orden 3 sobre $\mathbb{P}(L)$ tal que $f(X, Y, Z) = (X \cap \overline{(\overline{X} \cup Y)}) \cup (\overline{Z} \cup Y)$ $\forall X, Y, Z \subseteq L$, calcula $f(A, B, C)$, $f(L, B, A)$ y $f(A, A, B)$.

(iii) Simplifica la función booleana del apartado anterior.

6. Sea $(K, +, \cdot)$ un álgebra de Boole y $f_1(x, y, z) = x \cdot y' \cdot z' + x' \cdot y'$, $f_2(x, y, z) = y' \cdot z' + y' \cdot x'$ funciones booleanas sobre K. Demuestra que coinciden.

7. Sea $(K, +, \cdot)$ un álgebra de Boole. Simplifica las siguientes funciones booleanas sobre K y dibuja el diagrama lógico asociado a la expresión booleana obtenida.

(i) $f_1(x, y) = (x + y) \cdot (x' \cdot y')'$.

(ii) $f_2(x, y, z) = (x' + y' + z')' + [x' \cdot (y' \cdot z + y \cdot z' + y' \cdot z')]$.

(iii) $f_3(x, y, z, t) = (x \cdot y')' + z' \cdot t' + (x + t')$.

(iv) $f_4(x, y, z, t) = x \cdot y \cdot z \cdot t + x' \cdot y \cdot z \cdot t + x \cdot y \cdot z \cdot t' + x \cdot y' \cdot z' \cdot t + x' \cdot y' \cdot z' \cdot t + x \cdot y' \cdot z' \cdot t' + x' \cdot y' \cdot z' \cdot t'$.

(v) $f_5(x, y) = x \cdot y + x \cdot y' + x' \cdot y + (x + y)'$.

(vi) $f_6(x, y, z) = [x \cdot (x + y)'] + (z' \cdot x')'$.

(vii) $f_7(x, y, z, t) = [x + (x + y' + z')'] + [y \cdot (x' + z')]$.

Problemas de exámenes

8. Dada la función booleana $f : K^3 \longrightarrow K \mid f(x, y, z) = [(x' + y') \cdot z] + [(x + y') \cdot y]$, demuestra que su forma canónica disyuntiva es $f(x, y, z) = x \cdot y \cdot z + x \cdot y \cdot z' + x \cdot y' \cdot z + x' \cdot y \cdot z + x' \cdot y' \cdot z$ y obtén por el método de Quine-McCluskey una expresión booleana simplificada de esta función booleana.

9. (Septiembre 2000 Telec.) Dada la función booleana $f : K^3 \longrightarrow K \mid f(x, y, z) = [z' \cdot (x' + y)] + x' \cdot z$, demuestra que su forma canónica disyuntiva es $f(x, y, z) = x \cdot y \cdot z' + x' \cdot y \cdot z + x' \cdot y \cdot z' + x' \cdot y' \cdot z + x' \cdot y' \cdot z'$ y obtén por el método de Quine-McCluskey una expresión booleana simplificada de esta función booleana.