

Universidad Politécnica de Cartagena
Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

Integración de funciones de varias variables

1. Calcula las siguientes integrales dobles:

i) $\int \int_{\Omega} xy dx dy$ siendo $\Omega = [0, 1] \times [1, 3]$.

ii) $\int \int_{\Omega} ye^x dx dy$ siendo $\Omega = [-1, 1] \times [0, 2]$.

iii) $\int \int_{\Omega} y \cos x dx dy$ siendo $\Omega = [0, \pi] \times [1, 2]$.

iv) $\int \int_{\Omega} y \arctan x dx dy$ siendo $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$.

v) $\int \int_{\Omega} 2x dx dy$ siendo $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

vi) $\int \int_{\Omega} (x^2 + y) dx dy$ siendo $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

vii) $\int \int_{\Omega} (y + \log x) dx dy$ siendo $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}$.

viii) $\int \int_{\Omega} \sqrt{x^2 - y^2} dx dy$ siendo Ω el interior del triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, -1)$ y $(1, 1)$.

ix) $\int \int_{\Omega} xy dx dy$ siendo Ω el interior del triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$ y $(2, 0)$.

x) $\int \int_{\Omega} \sqrt{4 - y^2} dx dy$ siendo Ω el recinto limitado por las curvas $y^2 = 2x$ e $y^2 = 8 - 2x$.

xi) $\int \int_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy$ siendo Ω el recinto limitado por las curvas $y = x^3$ e $y = x^2$.

xii) $\int \int_{\Omega} e^{x/y} dx dy$ siendo Ω el recinto limitado por la curva $y^2 = x$ y las rectas $x = 0$ e $y = 1$.

2. Calcula, efectuando el cambio a coordenadas polares, las siguientes integrales dobles:

i) $\int \int_{\Omega} e^{x^2+y^2} dx dy$ siendo $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

ii) $\int \int_{\Omega} \sqrt{(x^2 + y^2)^3} dx dy$ siendo $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$.

iii) $\int \int_{\Omega} \log(x^2 + y^2) dx dy$ siendo Ω el recinto limitado por las circunferencias de ecuaciones $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$.

iv) $\int \int_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ siendo Ω la parte del interior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ que está en el primer cuadrante.

v) $\int \int_{\Omega} e^{x^2+y^2} dx dy$ siendo Ω la parte del interior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ que está en el tercer y cuarto cuadrante.

3. Calcula, utilizando integrales dobles, el área de los siguientes conjuntos:

- i) El interior de la circunferencia de radio r .
- ii) El interior de la elipse de semiejes a y b .
- iii) El interior del triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$ y $(2, 0)$.
- iv) La región delimitada por la recta $x + y = 5$ y la curva $xy = 6$.

4. Calcula $\int \int_{\Omega} xy dx dy$ siendo Ω el paralelogramo delimitado por las rectas $x - 2y - 1 = 0$, $2x - y - 5 = 0$, $x - 2y - 4 = 0$ y $2x - y - 2 = 0$, efectuando el cambio de coordenadas $x = \frac{-u+2v}{3}$ e $y = \frac{v-2u}{3}$.

5. Calcula $\int \int_{\Omega} (x + y)^2 e^{x-y} dx dy$ siendo Ω el paralelogramo delimitado por las rectas $x + y = 1$, $x + y = 4$, $x - y = -1$ y $x - y = 1$, efectuando un cambio de coordenadas adecuado.

6. Calcula las siguientes integrales triples:

- i) $\int \int \int_{\Omega} ye^{x+z} dx dy dz$ siendo $\Omega = [0, 2] \times [-1, 1] \times [1, 2]$.
- ii) $\int \int \int_{\Omega} xyz dx dy dz$ siendo $\Omega = [1, 2] \times [0, 1] \times [0, 1]$.
- iii) $\int \int \int_{\Omega} xy \cos z dx dy dz$ siendo $\Omega = [0, 1] \times [1, 2] \times [0, \pi]$.
- iv) $\int \int \int_{\Omega} z dx dy dz$ siendo $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$.
- v) $\int \int \int_{\Omega} y^2 dx dy dz$ siendo $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$.
- vi) $\int \int \int_{\Omega} (x + y + z^3) dx dy dz$ siendo $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

7. Calcula, usando integrales triples, el volumen de los siguientes conjuntos:

- i) El interior de la esfera de radio r .
- ii) El interior del cilindro de radio r y altura h .
- iii) El interior del cono de altura h y radio r .

8. Calcula, efectuando el cambio de coordenadas adecuado, las siguientes integrales:

- i) $\int \int \int_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$ siendo $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, y \leq 0\}$.
- ii) $\int \int \int_{\Omega} e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dx dy dz$ siendo $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$.
- iii) $\int \int \int_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$ siendo $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$.
- iv) $\int \int \int_{\Omega} \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy dz$ siendo $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, z \geq 0\}$.
- v) $\int \int \int_{\Omega} y dx dy dz$ siendo $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0, -1 \leq z \leq 1\}$.