

Universidad Politécnica de Cartagena
Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

Problemas de Álgebra
Espacios Vectoriales

1. Estudiar cual de los siguientes subconjuntos es subespacio de \mathbb{R}^n para el n correspondiente:

i) $S_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = b\}$ siendo $b \in \mathbb{R}$.

ii) $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot y = 0\}$.

iii) $S_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = b\}$ siendo $b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

iv) $S_4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = 2x_2, 2x_3 - x_4 = 0\}$.

v) $S_5 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq x_2\}$.

vi) $S_6 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_3 = b\}$ siendo $b \in \mathbb{R}$.

vii) $S_7 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - x_2 = 0, x_1 - x_2 + x_3 = 0, 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$.

2. Obtener las ecuaciones implícitas, una base y la dimensión:

a) De los subespacios del ejercicio 1.

b) De los siguientes subespacios:

b.1) $U_1 = \langle (1, 1, 1), (0, 1, 0) \rangle$.

b.2) $U_2 = \langle (1, 1, 0), (-2, -2, 0) \rangle$.

b.3) $U_3 = \langle (1, 1, -1), (1, -2, 0), (2, -1, -1) \rangle$.

b.4) $U_4 = \langle (1, 1), (-1, 1), (1, 0) \rangle$.

3. De las siguientes afirmaciones, demostrar las que son ciertas y dar un contraejemplo para las falsas.

3.1. Sea V un espacio vectorial de dimensión n . Entonces:

a) Todo sistema de $n + 1$ vectores de V siempre genera a V .

b) Un sistema de m vectores de V con $m < n$ es un sistema libre.

c) Un sistema libre de V con n vectores es un sistema generador de V .

d) Un sistema generador de V con n vectores es un sistema libre.

e) Todo sistema de V que contenga al vector nulo es ligado.

f) Todo sistema de V que no contenga al vector nulo es libre.

3.2) Si V es un espacio vectorial y $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ es un sistema libre, entonces:

a) $\{u_1, u_2 - u_1, u_3 - u_2\}$ es un sistema libre.

b) $\{u_1 - u_2, u_2 - u_1, u_3 - u_2\}$ es un sistema libre.

c) $\{u_1 + u_2, u_2 - u_1, u_3 - u_2\}$ es un sistema libre.

d) $\{u_1, u_2\}$ es un sistema libre.

e) $\{u_1, u_2, v\}$ con $v = au_1 + bu_2 + cu_3$, $c \neq 0$ es un sistema libre.

f) Si $\{u_1, w\}$ y $\{u_2, w\}$ son sistemas libres, entonces $\{u_1, u_2, w\}$ es sistema libre.

4. Sea V un espacio vectorial finitamente generado y $U, W \leq V$.

(i) Demostrar que si B es una base de $U \cap W$ entonces existen B_1 y B_2 bases de U y W respectivamente tales que B está contenida en ambas. Demostrar que $B' = B_1 \cup (B_2 \setminus B)$ es una base de $U + W$.

(ii) Deduce del apartado anterior que se verifica:

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

(iii) Demuestra que la suma de U y W es directa si y solo si $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W)$.

5. Sean $S, T \leq \mathbb{R}^4$ donde

$$S = \langle (1, -1, 0, 1), (2, 1, 1, 0), (1, 2, 1, -1) \rangle$$

$$T = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = 0, 3x - 4z + t = 0\}.$$

Calcula:

(i) Una base y la dimensión de S y T .

(ii) Los subespacios $S \cap T$ y $S + T$, dando bases de dichos subespacios vectoriales.

(iii) ¿Es la suma de S y T directa?

6. Sean $U_1, U_2 \leq \mathbb{R}^3$ donde

$$U_1 = \{(a, -a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$U_2 = \langle (1, 1, 2), (1, -2, -1), (3, -1, 2) \rangle.$$

Calcula:

- (i) Una base y la dimensión de U_1 y U_2 .
- (ii) Los subespacios $U_1 \cap U_2$ y $U_1 + U_2$, dando bases de dichos subespacios vectoriales.
- (iii) ¿Es la suma de U_1 y U_2 directa?

7. Sean $U_1, U_2 \leq \mathbb{R}^4$ donde

$$U_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = 2x_2, 2x_3 - x_4 = 0\}$$

$$U_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}.$$

Calcula:

- (i) Una base y la dimensión de U_1 y U_2 .
- (ii) Los subespacios $U_1 \cap U_2$ y $U_1 + U_2$, dando bases de dichos subespacios vectoriales.
- (iii) ¿Es la suma de U_1 y U_2 directa?

8. Determinar si los siguientes sistemas de vectores de \mathbb{R}^3 son linealmente independientes o dependientes. Obtener su rango y una base del subespacio que generan. Cuando sea posible expresar uno de ellos como combinación lineal de los otros.

- (i) $S_1 = \{(3, 1, 2), (1, -1, 2), (0, 1, 2)\}$.
- (ii) $S_2 = \{(3, 1, 2), (1, -1, 2), (0, 1, 2), (4, -1, 2)\}$.
- (iii) $S_3 = \{(1, 2, 3), (-1, 1, 0), (2, 1, 3)\}$.
- (iv) $S_4 = \{(1, 1, a), (1, a, 1), (0, 0, 0), (a, 1, 1)\}$.

9. Sea $S = \{(1, -1, 1), (2, m - 1, 2), (1, m, m + 2)\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

- (i) Obtener según los valores de m una base y la dimensión del subespacio $U = \langle S \rangle$.
- (ii) Para que valores de m y n pertenecerá el vector $(1, n, n)$ al subespacio U .

10. Sea $\mathbb{R}_n[x]$ el \mathbb{R} -espacio vectorial formado por los polinomios con coeficientes reales y grado menor o igual que n .

(i) Demostrar que x^n y sus n primeras derivadas forman una base de $\mathbb{R}_n[x]$. Dar otra base.

(ii) Si $W = \langle 1 + 3x + x^2, -1 + 2x^2, 3 + 3x + x^2 \rangle \leq \mathbb{R}_2[x]$, ¿pertenecen $1 + x^2$ y $7 + 6x$ a W ? Dar las coordenadas de éstos en las bases obtenidas en (i).

11. En el espacio vectorial \mathbb{R}^2 se consideran los sistemas de vectores $B = \{e_1, e_2\}$ y $C = \{u_1, u_2\}$ donde $e_1 = (1, 1)$, $e_2 = (1, -1)$, $u_1 = (1, 0)$ y $u_2 = (0, 1)$.

(i) Comprobar que son bases de \mathbb{R}^2 .

(ii) Hallar las coordenadas de los vectores $v = 2u_1 - u_2$ y $w = 2e_1 - e_2$ en la base C y en la base B .

Problemas de exámenes

12. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ se consideran los subespacios $S = \langle x^2 + x - 1, x^2 + x + 1 \rangle$ y $T = \langle x^2 + x, -x^2 + x - 1 \rangle$. Calcula bases de S , T , $S \cap T$ y $S + T$.

13. Si $S = \langle (1, 1, -1, 1), (1, 1, 0, 1) \rangle$ y $T = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y - t = 0, 4x - 3y + 2z = 0\}$, calcula bases, ecuaciones cartesianas y dimensión de S , T , $S \cap T$ y $S + T$.

14. Si $U = \langle (1, -1, 0, 1), (-1, -1, 0, 0) \rangle$ y $T = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - z = 0, 2x + y - z + 2t = 0\}$, dar bases y dimensiones de U , T , $U + T$, $U \cap T$.

15. Sean $S = \langle (-1, 1, 1), (1, -1, 0), (0, 0, 1) \rangle$ y $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2z = 0\}$. Calcula bases de S , T , $S \cap T$ y $S + T$.

16. Sean $S = \langle (1, 1, 1), (-1, 1, 0), (2, -2, 0) \rangle$ y $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y - 2z = 0\}$. Calcula bases de S , T , $S \cap T$ y $S + T$.

17. Sea $S = \langle (1, 2 - 1), (1, a, -1), (a, -1, -1) \rangle$ y $v = (1, 0, b)$. i) ¿Para qué valores de a y de b será v un vector de S ?

ii) Para $a = 2$ ¿Es cada uno de los vectores del sistema generador anterior de S combinación lineal de los otros dos vectores? Calcula una base y la dimensión del subespacio S y da las coordenadas del vector v en dicha base.