Transformada Z

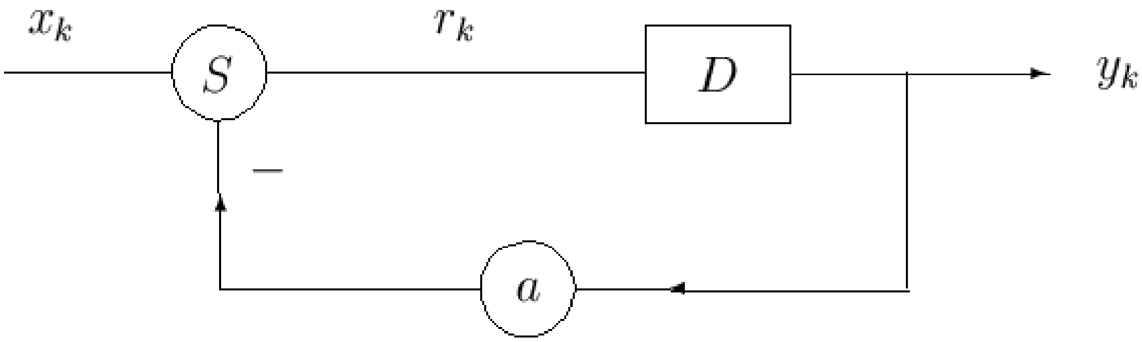
Jose Salvador Cánovas Peña

November 13, 2007

Contents

0.1 Ecuaciones en diferencias finitas

El interés del estudio de la transformada Z es debido a que es la análoga a la transformada de Laplace para resolver ecuaciones en diferencias finitas. Estas ecuaciones aparecen en ingeniería al modelizar sistemas electrónicos cuyas entradas y salidas son una sucesión de datos discretos. Para fijar ideas, consideremos el siguiente ejemplo.



Este dispositivo está formado por dos elementos. El primero de ellos, marcado con una S, es un elemento que suma o resta datos, que a su vez vendrán modulados por números reales. El denotado por una D es un aparato que produce un retardo de una unidad temporal en la sucesión. La figura representa el tipo más sencillo de retroalimentación de una señal. Los datos de entrada vienen dados por la sucesión x_k y los de salida por

$$y_{k+1} = r_k. \tag{0.1}$$

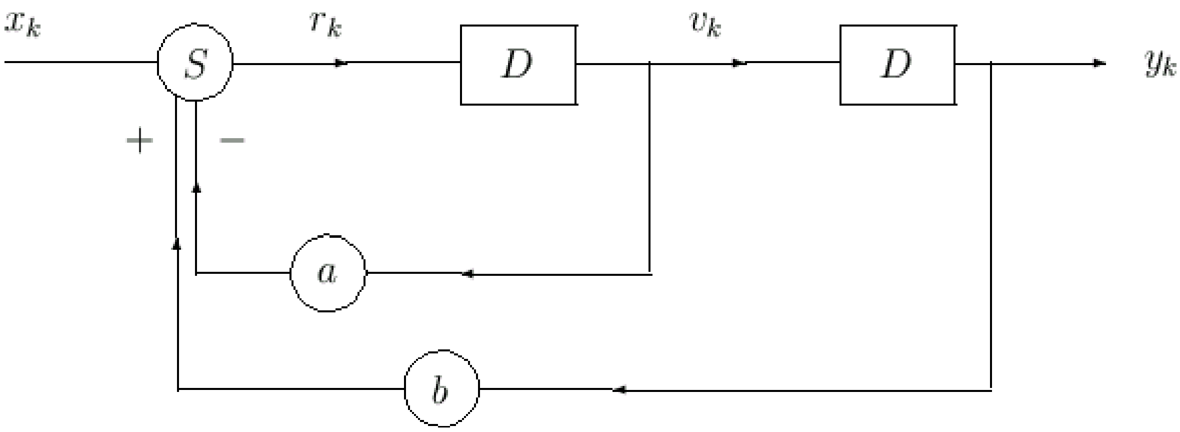
En el proceso, los datos intermedios r_k vienen dados por la expresión

$$r_k = x_k - ay_k, \tag{0.2}$$

donde a es un número real. Combinando (0.1) y (0.2) obtenemos la ecuación en diferencias de orden uno

$$y_{k+1} + ay_k = x_k.$$

Si complicamos el dispositivo, como se muestra en la figura,



se obtiene una ecuación de orden dos. Aquí

$$y_{k+1} = v_k,$$

$$v_{k+1} = r_k,$$

$$r_k = x_k + by_k - av_k,$$

de donde se obtiene la ecuación

$$y_{k+2} + ay_{k+1} - by_k = x_k.$$

El uso de la transformada Z permite afrontar con ciertas garantías de éxito la resolución de estas ecuaciones. Por ejemplo supongamos la ecuación

$$\begin{cases} y_{k+2} + y_{k+1} - 2y_k = 1; \\ y_0 = 0, \; y_1 = 1. \end{cases}$$

Vamos a ver cómo la transformada Z nos permite obtener la solución de la ecuación anterior transformando dicho problema en un problema algebraico.

0.2 Definición y propiedades básicas

Consideremos una sucesión de números complejos x_k. Se define la *transformada Z* de la misma como la serie

$$\mathcal{Z}[x_k](z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{z^n}. \tag{0.3}$$

Nótese que (0.3) es una serie de Laurent con parte regular x_0 y parte singular $\sum_{n=1}^{\infty} x_n z^{-n}$, y que por tanto convergerá en un disco de convergencia de la forma

$$A(0, r, +\infty) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$$

donde r es el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} x_n z^n$.

Por ejemplo, si $\delta = (1, 0, 0, 0, ...)$ entonces su transformada Z es

$$\mathcal{Z}[\delta](z) = 1$$

definida en todo el plano complejo. Si $x_k = (1, 1, 1, ...)$, entonces

$$\mathcal{Z}[1](z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1},$$

siempre que $|z| > 1$.

Propiedades básicas.

- Linealidad. Dadas las sucesiones x_k e y_k y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, se verifica

$$\mathcal{Z}[\alpha x_k + \beta y_k](z) = \alpha \mathcal{Z}[x_k](z) + \beta \mathcal{Z}[y_k](z)$$

para todo z en el dominio de definición de $\mathcal{Z}[x_k](z)$ y $\mathcal{Z}[y_k](z)$.

Demostración. Basta calcular

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[\alpha x_k + \beta y_k](z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha x_n + \beta y_n}{z^n} \\
&= \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{z^n} + \beta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_n}{z^n} = \alpha \mathcal{Z}[x_k](z) + \beta \mathcal{Z}[y_k](z).
\end{aligned}$$

■

- Dada la sucesión x_k, definimos la nueva sucesión $y_k = x_{k+1}$. Entonces

$$\mathcal{Z}[y_k](z) = \mathcal{Z}[x_{k+1}](z) = z\mathcal{Z}[x_k](z) - zx_0.$$

En general, si $k_0 \in \mathbb{N}$ y definimos $y_k = x_{k+k_0}$, tenemos la fórmula

$$\mathcal{Z}[x_{k+k_0}](z) = z^{k_0} \mathcal{Z}[x_k](z) - \sum_{n=0}^{k_0-1} x_n z^{k_0-n}.$$

Demostración. Calculamos

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[x_{k+1}](z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_{n+1}}{z^n} \\
&= z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_{n+1}}{z^{n+1}} = z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{z^n} \\
&= z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{z^n} - zx_0 = z\mathcal{Z}[x_k](z) - zx_0.
\end{aligned}$$

■

- Dada la sucesión x_k y $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, se verifica

$$\mathcal{Z}[a^k x_k](z) = \mathcal{Z}[x_k](z/a).$$

Dmostración. Calculamos

$$\mathcal{Z}[a^k x_k](z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n x_n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{(z/a)^n} = \mathcal{Z}[x_k](z/a).$$

■

Por ejemplo, si $x_k = (1, 2, 2^2, 2^3, ...)$, se tiene que

$$\mathcal{Z}[2^k](z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^n} = \frac{1}{1 - \frac{2}{z}} = \frac{z}{z-2}.$$

- Dadas las sucesiones x_k y k^m, $m \in \mathbb{N}$, se verifica

$$\mathcal{Z}[k^m x_k](z) = [-z\frac{d}{dz}]^m \mathcal{Z}[x_k](z),$$

donde por $-z\frac{d}{dz}$ se entiende la operación derivada y luego multiplicación por $-z$.

Demostración. Hacemos la demostración por inducción en m. Si $m=1$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[kx_k](z) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{nx_n}{z^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx_n}{z^n}\\
&= z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx_n}{z^{n+1}}=z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dz}\frac{-x_n}{z^n}\\
&= z\frac{d}{dz}\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{z^n}\right)=-z\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x_n}{z^n}-x_0\right)=-z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}[x_k](z).
\end{aligned}$$

Si suponemos el resultado cierto para m, veamos que también lo es para $m+1$. Para esto calculamos

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[k^{m+1}x_k](z) &= \mathcal{Z}[k\cdot k^m x_k](z)=-z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}[k^m x_k](z)\\
&= (-z\frac{d}{dz})[-z\frac{d}{dz}]^m\mathcal{Z}[x_k](z)=[-z\frac{d}{dz}]^{m+1}\mathcal{Z}[x_k](z).
\end{aligned}$$

■

Por ejemplo, si $x_k=k^2$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[k^2](z) &= [-z\frac{d}{dz}]^2\mathcal{Z}[1](z)=[-z\frac{d}{dz}]^2\frac{z}{z-1}\\
&= -z\frac{d}{dz}\left(-z\frac{d}{dz}\frac{z}{z-1}\right)=-z\frac{d}{dz}\left(\frac{-z}{z-1}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\right)\\
&= \frac{z}{z-1}-\frac{3z^2}{(z-1)^2}+\frac{2z^3}{(z-1)^3},
\end{aligned}$$

si $|z|>1$.

0.3 Transformada Z inversa

Es interesante obtener transformadas Z inversas de funciones de variable compleja $F(z)$, es decir, qué sucesiones verifican que

$$\mathcal{Z}[x_n](z)=F(z),$$

o equivalentemente

$$x_n=\mathcal{Z}^{-1}[F(z)].$$

Para calcular la transformada Z de una función $F(z)$ basta calcular el desarrollo en serie de Laurent centrada en cero de manera que tenga un anillo de convergencia de la forma $\{z\in\mathbb{C}:|z|>r\}$, donde $r\geq 0$. Por ejemplo, si $F(z)=\frac{1}{z-1}$, entonces desarrollando en serie de Laurent

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$$

si $|z|>1$. Entonces la sucesión

$$x_k=\mathcal{Z}^{-1}[1/(z-1)]=(0,1,1,1,...).$$

0.4 Aplicación a la resolución de la ecuación en diferencias

Consideramos el problema

$$\begin{cases} y_{k+2}+y_{k+1}-2y_k=1;\\ y_0=0,\ y_1=1,\end{cases}$$

obtenido anteriormente. Tomando la transformada Z en la ecuación, usando las propiedades de ésta y tomando en consideración las condiciones iniciales obtenemos

$$\mathcal{Z}[y_{k+2}+y_{k+1}-2y_k](z)=\mathcal{Z}[1](z),$$

y desarrollando

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[y_{k+2}+y_{k+1}-2y_k](z) &= \mathcal{Z}[y_{k+2}](z)+\mathcal{Z}[y_{k+1}](z)-2\mathcal{Z}[y_k](z)\\ &= z^2\mathcal{Z}[y_k](z)-z+z\mathcal{Z}[y_k](z)-2\mathcal{Z}[y_k](z)\\ &= (z^2+z-2)\mathcal{Z}[y_k](z)-z.\end{aligned}$$

Por otra parte

$$\mathcal{Z}[1](z)=\frac{z}{z-1}.$$

Entonces

$$(z^2+z-2)\mathcal{Z}[y_k](z)=z+\frac{z}{z-1}=\frac{z^2}{z-1},$$

con lo que

$$\mathcal{Z}[y_k](z)=\frac{z^2}{(z^2+z-2)(z-1)}.$$

Pasamos a fracciones simples

$$\mathcal{Z}[y_k](z)=\frac{z^2}{(z-1)^2(z+2)}=\frac{-1}{(z-1)^2}-\frac{3}{z-1}+\frac{4}{z+2},$$

y calculamos la transformada inversa obteniendo los desarrollos en series de Laurent

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{-2}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-2}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{z^{n+1}}$$

si $|z|>2$.

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$$

si $|z|>1$. Finalmente

$$\frac{-1}{(z-1)^2}=\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z-1}\right)=\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dz}\frac{1}{z^{n+1}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{z^{n+2}}$$

si $|z|>1$. Entonces si $|z|>2$ se tiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[y_k](z) &= \frac{-1}{(z-1)^2}-\frac{3}{z-1}+\frac{4}{z+2}\\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{z^{n+2}}-3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}+4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{z^{n+1}}\\ &= \frac{1}{z}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{z^{n+2}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{z^{n+2}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4(-2)^{n+1}}{z^{n+2}}\\ &= \frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-n-4+4(-2)^{n+1}}{z^{n+2}},\end{aligned}$$

por lo que si $k\geq 2$

$$y_k=4(-2)^{k+1}-4+k.$$

0.5 Funciones de transferencia.

La función de transferencia asociada a la transformada Z se define de forma análoga a la función de transferencia asociada a la transformada de Laplace. Consideremos en este contexto una ecuación en diferencias finitas de la forma

$$a_n y_{k+n}+a_{n-1}y_{k+n-1}+...+a_1y_{k+1}+a_0y_k=x_k, \tag{0.4}$$

siendo $a_i \in \mathbb{R}$, $0 \leq i \leq n$. Entonces, suponiendo que $y_i = 0$ $i < k$, tomando la transformada Z obtenemos que

$$(a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0)\mathcal{Z}[y_k](z) = \mathcal{Z}[u_k](z),$$

por lo que

$$\mathcal{Z}[y_k](z) = \frac{1}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0}\mathcal{Z}[u_k](z).$$

Se define enotnces la función de transferencia asociada a la ecuación como

$$T(z) = \frac{\mathcal{Z}[y_k](z)}{\mathcal{Z}[u_k](z)} = \frac{1}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0}.$$

Podemos estudiar entonces la estabilidad de la ecuación entendiendo ésta de forma análoga al caso continuo estudiada en el tema anterior, es decir, si para toda solución asociada a una condición inicial dada se verifica que

$$\lim_{k\to\infty} y_k = 0.$$

El siguiente resultado caracteriza la estabilidad del sistema en base a los polos de la función de transferencia.

Theorem 1 *El sistema dado por la ecuación (0.4) es estable si y sólo si todos los polos de la función de transferencia verifican que* $|z| < 1$.