Variable Compleja y Transformadas

Segundo Curso, I.T. Industrial (Electricidad y Electrónica)

Examen de operaciones básicas, 12 de febrero de 2005

1.- Calcula el módulo de $4 - i$.

Solución: $|4 - i| = |4 + (-1) \cdot i| = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$.

2.- Calcula el argumento de $3 - 3\sqrt{3}i$.

Solución: Como $3 - 3\sqrt{3}i$ está en el cuarto cuadrante obtenemos el argumento directamente del arco tangente.

$$\arg(3 - 3\sqrt{3}i) = \operatorname{arc\,tg}(-3\sqrt{3}/3) = -\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{3}) = -\pi/3.$$

3.- Escribe $-1 + i$ en forma exponencial.

Solución: Obtenemos el módulo $|-1 + i| = |-1 + 1 \cdot i| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Como $-1 + i$ está en el segundo cuadrante necesitamos desplazar media vuelta el argumento que devuelve el arco tangente, ya que éste estará en el cuarto cuadrante.

$$\arg(-1 + i) = \operatorname{arc\,tg}(1/(-1)) + \pi = -\operatorname{arc\,tg}(1) + \pi = -\pi/4 + \pi = 3\pi/4.$$

Entonces $-1 + i = \sqrt{2}e^{(3\pi/4)i}$.

4.- Escribe $2e^{(4\pi/3)i}$ en forma binómica.

Solución: Se tiene que

$$\begin{aligned} 2e^{(4\pi/3)i} &= 2(\cos(4\pi/3) + i \cdot \operatorname{sen}(4\pi/3)) = 2(-\cos(\pi/3) - i \cdot \operatorname{sen}(\pi/3)) = \\ &= 2(-1/2 - i\sqrt{3}/2) = -1 - \sqrt{3}i \end{aligned}$$

5.- Escribe $\dfrac{1}{3 - 2i}$ en forma binómica.

Solución: Multiplicamos por el conjugado

$$\frac{1}{3 - 2i} = \frac{3 + 2i}{(3 - 2i)(3 + 2i)} = \frac{3 + 2i}{3^2 + (-2)^2} = \frac{3}{13} + i \cdot \frac{2}{13}.$$

6.- Escribe $(-i)^{157}$ en forma binómica.

Solución: Sacamos potencias de los exponentes

$$\begin{aligned}(-i)^{157} &= (-1)^{157}\cdot i^{157} = (-1)^{156}\cdot(-1)\cdot i^{156}\cdot i = \\ &= ((-1)^2)^{78}\cdot(-1)\cdot(i^4)^{39}\cdot i = 1^{78}\cdot(-1)\cdot 1^{39}\cdot i = \\ &= (-1)\cdot i = 0+(-1)\cdot i = -i.\end{aligned}$$

7.- Calcula $(-1+\sqrt{3}i)^{123}$

Solución: Escribimos la base en forma exponencial. El módulo vale

$$|-1+\sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Como $-1+\sqrt{3}i$ está en el segundo cuadrante sumamos π al argumento y

$$\arg(-1+\sqrt{3}i) = \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{3}/(-1)) + \pi = -\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{3}) + \pi = -\pi/3+\pi = 2\pi/3.$$

Entonces

$$\begin{aligned}(-1+\sqrt{3}i)^{123} &= (2e^{(2\pi/3)i})^{123} = 2^{123}e^{123\cdot(2\pi/3)i} = \\ &= 2^{123}e^{82\pi i} = 2^{123}(e^{2\pi i})^{41} = 2^{123}1^{41} = 2^{123}.\end{aligned}$$

8.- Calcula $\sqrt[3]{-2+2i}$.

Solución: Escribimos el radicando en forma exponencial. El módulo vale

$$|-2+2i| = \sqrt{(-2)^2+2^2} = \sqrt{8}.$$

Como $-2+2i$ está en el segundo cuadrante sumamos π al argumento y

$$\arg(-2+2i) = \operatorname{arc\,tg}(2/(-2)) + \pi = -\operatorname{arc\,tg}(1) + \pi = -\pi/4+\pi = 3\pi/4.$$

Entonces $-2+2i = \sqrt{8}e^{(3\pi/4)i}$ y sus tres raíces cúbicas serán

$$\sqrt[3]{-2+2i} = \begin{cases} \sqrt[3]{\sqrt{8}}e^{(3\pi/4)i/3} = \sqrt{2}e^{(3\pi/12)i} \\ \sqrt[3]{\sqrt{8}}e^{(3\pi/4)i/3+(2\pi/3)i} = \sqrt{2}e^{(11\pi/12)i} \\ \sqrt[3]{\sqrt{8}}e^{(3\pi/4)i/3+(4\pi/3)i} = \sqrt{2}e^{(19\pi/12)i} \end{cases}$$

9.- Calcula $(5+i)\cdot(-2+4i)$.

Solución: $(5+i)\cdot(-2+4i) = 5\cdot(-2)+5\cdot 4i+i\cdot(-2)+i\cdot 4i = -10+20i-2i-4 = -14+18i$.

10.- Calcula $\dfrac{5+i}{-2+4i}$.

Solución: Multiplicamos por el conjugado del denominador

$$\frac{5+i}{-2+4i} = \frac{(5+i)(-2-4i)}{(-2+4i)(-2-4i)} = \frac{-10-20i-2i-4i^2}{(-2)^2+4^2} = \frac{-6-22i}{20} = -\frac{3}{10}-\frac{11}{10}\cdot i.$$

Variable Compleja y Transformadas

Segundo Curso, I.T.I. Electricidad y Electrónica

Examen de problemas, 12 de febrero de 2005

1.- Sean $u(x,y)$, $v(x,y)$ y $f(z)$ funciones, tales que $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$.

a) (0.5 puntos) Encuentra qué relación han de cumplir a y b para que sea armónica la función

$$u(x,y) = a \cdot x^2 + b \cdot y^2 - xy + 2x + 3y - 1$$

<u>Solución</u>: La función $u(x,y)$ es armónica si y sólo si

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0.$$

Derivando

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2ax - y + 2 \Longrightarrow \dfrac{\partial u^2}{\partial x^2}(x,y) = 2a \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 2by - x + 3 \Longrightarrow \dfrac{\partial u^2}{\partial y^2}(x,y) = 2b \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 2a + 2b.$$

Luego $u(x,y)$ es armónica si y sólo si $a = -b$.

b) (1 punto) Encuentra $v(x,y)$ de manera que $f(x + i \cdot y) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$ sea holomorfa y $f(2-i) = -8i$, para la función

$$u(x,y) = x^2 - y^2 + 2xy - x + 3$$

<u>Solución</u>: Aplicamos una de las condiciones de Cauchy-Riemann y

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2x + 2y - 1.$$

Entonces

$$v(x,y) = \int \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\, dy = \int (2x + 2y - 1)\, dy = 2xy + y^2 - y + \phi(x).$$

Usamos la otra condición de Cauchy-Riemman para determinar $\phi(x)$,

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -(-2y + 2x) \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 2y + \phi'(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow \phi'(x) = -2x \Longrightarrow \phi(x) = -x^2 + C$$

Entonces $v(x,y) = 2xy + y^2 - y - x^2 + C$, y como $f(2-i) = -8i$

$$\begin{aligned} -8i &= f(2-i) = u(2,-1) + i \cdot v(2,-1) = \\ &= 2^2 - (-1)^2 + 2 \cdot 2(-1) - 2 + 3 + i \cdot (2 \cdot 2(-1) + (-1)^2 - (-1) - 2^2 + C) = \\ &= (-6 + C)i \end{aligned}$$

Concluimos finalmente que $C = -2$ y $v(x,y) = 2xy + y^2 - y - x^2 - 2$

c) (0.5 puntos) Identifica como función $f(z)$

$$f(x + i \cdot y) = -2 - x^2 - y - 4xy + y^2 + i \cdot (1 + x + 2x^2 - 2xy - 2y^2).$$

<u>Solución</u>: Agrupamos en potencias buscando la variable $z = x + i \cdot y$,

$$\begin{aligned} f(x + i \cdot y) &= (-x^2 + y^2 - 2ixy) + (2ix^2 - 2iy^2 - 4xy) + ix - y - 2 + i = \\ &= -(x + i \cdot y)^2 + 2i(x + i \cdot y)^2 + i(x + i \cdot y) - 2 + i = \\ &= -z^2 + 2iz^2 + iz - 2 + i. \end{aligned}$$

Entonces $f(z) = (-1 + 2i)z^2 + iz - 2 + i$. A este resultado también se podía haber llegado mediante la sustitución $x = (z + \overline{z})/2$, $y = (z - \overline{z})/(2i)$, si bien este camino es más largo.

2.- Se considera la función

$$f(z) = \frac{1}{z^2 \cdot (z^2 + 2z + 5)}.$$

a) (0.5 puntos) Halla todas las singularidades aisladas y analiza de qué tipo son.

<u>Solución</u>: Es evidente que del factor z^2 que aparece en el denominador obtenemos como polo de orden 2 a $z_1 = 0$. Al resolver $z^2 + 2z + 5 = 0 \Longleftrightarrow z = -1 \pm 2 \cdot i$ deducimos que $z_2 = -1 + 2i$ y $z_3 = -1 - 2i$ son dos polos de orden 1.

b) (1.5 puntos) Construye la serie de Laurent alrededor de $z_0 = 0$.

<u>Solución</u>: Vamos a descomponer $f(z)$ en fracciones simples. Aunque se puede buscar una descomposición de tipo

$$f(z) = \frac{1}{z^2 \cdot (z^2 + 2z + 5)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z + 1 - 2i} + \frac{D}{z + 1 + 2i},$$

si sacamos z^2 como factor en el denominador y buscamos

$$f(z) = \frac{1}{z^2 \cdot (z^2 + 2z + 5)} = \frac{1}{z^2} \left(\frac{\alpha}{z + 1 - 2i} + \frac{\beta}{z + 1 + 2i} \right).$$

obtenemos un sistema más rápido de resolver, que será

$$(\alpha+\beta)z+(1+2i)\alpha+(1-2i)\beta=0\cdot z+1,$$

de donde $\alpha+\beta=0$ y $(1+2i)\alpha+(1-2i)\beta=1$. Como por la primera ecuación sabemos que $\beta=-\alpha$, la segunda ecuación se reescribe como $4i\alpha=1$, y por lo tanto $\alpha=1/(4i)$ y $\beta=-1/(4i)$.

$$f(z)=\frac{1}{z^2\cdot(z^2+2z+5)}=\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{4i}\cdot\frac{1}{z+1-2i}-\frac{1}{4i}\cdot\frac{1}{z+1+2i}\right).$$

Desarrollamos el sumando $1/(z+1-2i)$ buscando una serie geométrica

$$\frac{1}{z+1-2i}=\frac{1}{1-2i}\cdot\frac{1}{1-(-z/(1-2i))}=\frac{1}{1-2i}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{(1-2i)^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{(1-2i)^{n+1}}.$$

Hacemos lo mismo con el sumando $1/(z+1+2i)$ y llegamos a

$$\frac{1}{z+1+2i}=\frac{1}{1+2i}\cdot\frac{1}{1-(-z/(1+2i))}=\frac{1}{1+2i}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{(1+2i)^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{(1+2i)^{n+1}}.$$

Si aplicamos todo lo que hemos deducido hasta ahora

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{4i}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{(1-2i)^{n+1}}-\frac{1}{4i}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{(1+2i)^{n+1}}\right)=\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4i}\cdot\frac{(-1)^n}{(1-2i)^{n+1}}-\frac{1}{4i}\cdot\frac{(-1)^n}{(1+2i)^{n+1}}\right)\cdot z^{n-2}=\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n(1+2i)^{n+1}-(-1)^n(1-2i)^{n+1}}{4i\cdot(1-2i)^{n+1}\cdot(1+2i)^{n+1}}\right)\cdot z^{n-2}=\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4i}\left(\frac{(1+2i)^{n+1}-(1-2i)^{n+1}}{(1^2+(-2)^2)^{n+1}}\right)\cdot z^{n-2}=\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot i}{4\cdot 5^{n+1}}\left((1+2i)^{n+1}-(1-2i)^{n+1}\right)\cdot z^{n-2}=\\
&= \sum_{n=-2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+3}\cdot i}{4\cdot 5^{n+3}}\left((1+2i)^{n+3}-(1-2i)^{n+3}\right)\cdot z^{n}.
\end{aligned}$$

Es fácil probar que los coeficientes de la serie anterior son números reales, puesto que

$$\begin{aligned}
c_n &= i\left((1+2i)^{n+3}-(1-2i)^{n+3}\right)=i\left((1+2i)^{n+3}-\overline{(1-2i)^{n+3}}\right)=\\
&= i\cdot 2\,\mathrm{Im}\left((1+2i)^{n+3}\right)i=-2\,\mathrm{Im}\left((1+2i)^{n+3}\right)\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Sin embargo no se aprecia ninguna simplificación sencilla de la expresión de la serie.

3.- Sea γ el cuadrado de vértices $\pm a \pm a \cdot i$, con $a > 0$. Calcula en los casos en los que tenga sentido la integral $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz$

a) (1 punto) Para $f(z) = \dfrac{z+1}{z^2(z-2+i)}$.

<u>Solución</u>: Claramente $f(z)$ es holomorfa en todo $\mathbb{C}$ salvo en $z_1 = 0$, que es un polo doble, y $z_2 = 2 - i$ que es un polo simple. Vamos a calcular los residuos en las singularidades. Para $z_1 = 0$ construimos

$$g(z) = z^2 \cdot f(z) = \frac{z^2(z+1)}{z^2(z-2+i)} = \frac{z+1}{z-2+i}$$

cuya derivada es

$$g'(z) = \frac{1 \cdot (z-2+i) - (z+1) \cdot 1}{(z-2+i)^2} = \frac{-3+i}{(z-2+i)^2}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f,0) &= g'(0) = \frac{-3+i}{(-2+i)^2} = \frac{(-3+i)(-2-i)^2}{(-2+i)^2(-2-i)^2} = \\
&= \frac{(-3+i)((-2)^2 + 2(-2)(-i) + (-i)^2)}{((-2)^2+1^2)^2} = \\
&= \frac{(-3+i)(3+4i)}{(4+1)^2} = \frac{-9+3i-12i+4i^2}{25} = \\
&= \frac{-13-9i}{25}.
\end{aligned}$$

Para $z_2 = 2 - i$, que es polo simple, partimos de

$$g(z) = (z-2+i) \cdot f(z) = \frac{(z-2+i)(z+1)}{z^2(z-2+i)} = \frac{z+1}{z^2}$$

para concluir que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f, 2-i) &= g(2-i) = \frac{(2-i)+1}{(2-i)^2} = \frac{3-i}{(2-i)^2} = \\
&= -\mathrm{Res}(f,0) = \frac{13+9i}{25}.
\end{aligned}$$

Es obvio que $z_1 = 0$ siempre está dentro del cuadrado, pero $z_2 = 2 - i$ lo estará si y sólo si $a < 2$. Tenemos entonces que distinguir dos casos

- Si $a < 2$

$$\int_\gamma \frac{z+1}{z^2(z-2+i)}\,dz = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}(f,0) = \frac{18\pi}{25} - \frac{26\pi}{25} \cdot i.$$

- Si $a > 2$
$$\int_\gamma \frac{z+1}{z^2(z-2+i)}\,dz = 2\pi i \cdot (\mathrm{Res}(f,0) + \mathrm{Res}(f,2-i)) = 0.$$

b) (1 punto) Para $f(z) = \dfrac{\mathrm{sen}(z^2)}{z(z^2+1)}$.

<u>Solución</u>: La aparición del factor $\mathrm{sen}(z^2)$ hace que $z = 0$ no sea un polo de orden 1 sino una singularidad evitable (es decir, no es singularidad). Las únicas singularidades que tiene $f(z)$ son $z_1 = i$ y $z_2 = -i$, ambas polos de orden 1. Para $z_1 = i$ construimos

$$g(z) = (z-i)\cdot f(z) = \frac{(z-i)\cdot \mathrm{sen}(z^2)}{z(z-i)(z+i)} = \frac{\mathrm{sen}(z^2)}{z(z+i)}$$

y por lo tanto

$$\mathrm{Res}(f,i) = g(i) = \frac{\mathrm{sen}(i^2)}{i(i+i)} = \frac{\mathrm{sen}(-1)}{i(2i)} = -\frac{\mathrm{sen}(1)}{-2} = \frac{\mathrm{sen}(1)}{2}.$$

Hacemos un razonamiento similar para $z_2 = -i$, partiendo esta vez de

$$g(z) = (z+i)\cdot f(z) = \frac{(z+i)\cdot \mathrm{sen}(z^2)}{z(z-i)(z+i)} = \frac{\mathrm{sen}(z^2)}{z(z-i)}$$

y deduciendo que

$$\mathrm{Res}(f,-i) = g(-i) = \frac{\mathrm{sen}((-i)^2)}{(-i)(-i-i)} = \frac{\mathrm{sen}(-1)}{(-i)(-2i)} = -\frac{\mathrm{sen}(1)}{-2} = \frac{\mathrm{sen}(1)}{2}.$$

Nuevamente hay que distinguir dos casos

- Si $a < 1$ tanto $z_1 = i$ como $z_2 = -i$ están fuera del cuadrado. Entonces $f(z)$ es holomorfa en el interior de la curva y por tanto
$$\int_\gamma \frac{\mathrm{sen}(z^2)}{z(z^2+1)}\,dz = 0$$
- Si $a > 1$ las dos singularidades son interiores a la curva y
$$\int_\gamma \frac{\mathrm{sen}(z^2)}{z(z^2+1)}\,dz = 2\pi i\,(\mathrm{Res}(f,i) + \mathrm{Res}(f,-i)) = 2\pi i\left(\frac{\mathrm{sen}(1)}{2} + \frac{\mathrm{sen}(1)}{2}\right) = 2\pi\,\mathrm{sen}(1)i.$$

c) (1 punto) Para $f(z) = \dfrac{e^{1/z}}{2z}$.

Solución: La función $f(z)$ presenta su única singularidad en $z_1 = 0$, y es de tipo esencial por la aparición del término $e^{1/z}$. Para calcular el residuo tenemos entonces que construir la serie de Laurent de $f(z)$ en el punto $z = 0$. Partimos de la serie de la función exponencial

$$e^{\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^n}{n!} = 1 + \omega + \frac{\omega^2}{2} + \frac{\omega^3}{6} + \frac{\omega^4}{24} + \cdots$$

y hacemos la sustitución $\omega = 1/z$ para tener que

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \cdot z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{6z^3} + \frac{1}{24z^4} + \cdots$$

Entonces

$$f(z) = \frac{e^{1/z}}{2z} = \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \cdot z^n}}{2z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \cdot 2 \cdot z^{n+1}} = \frac{1}{2z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{4z^3} + \frac{1}{12z^4} + \frac{1}{48z^5} + \cdots$$

Entonces $\mathrm{Res}(f, 0) = 1/2$, puesto que el residuo es el número que multiplica a la potencia z^{-1}. Como $z_1 = 0$ es siempre interior a la curva deducimos que para cualquier valor de $a > 0$

$$\int_{\gamma} \frac{e^{1/z}}{2z}\, dz = 2\pi i\, (\mathrm{Res}(f, 0)) = 2\pi i \frac{1}{2} = \pi i.$$

4.- (3 puntos) Utiliza la transformada de Laplace para resolver la ecuación diferencial

$$y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 5\cos t$$

con condiciones iniciales $y(0) = 2$ e $y'(0) = 4$.

Solución: Llamaremos $Y(z) = \mathcal{L}[y(t)](z)$. Son hechos conocidos que

$$\mathcal{L}[y''(t)](z) = z^2 \cdot \mathcal{L}[y(t)](z) - zy(0) - y'(0) = z^2 Y(z) - 2z - 4.$$

$$\mathcal{L}[y'(t)](z) = z \cdot \mathcal{L}[y(t)](z) - y(0) = zY(z) - 2.$$

$$\mathcal{L}[\cos t](z) = \frac{z}{z^2 + 1}.$$

Aplicando estas propiedades en la ecuación diferencial deducimos que

$$(z^2 Y(z) - 2z - 4) + 2(zY(z) - 2) + 2Y(z) = \frac{5z}{z^2 + 1},$$

es decir,

$$(z^2 + 2z + 2)Y(z) - 2z - 4 - 4 = \frac{5z}{z^2 + 1}.$$

Despejamos $Y(z) = \mathcal{L}[y(t)](z)$.

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{2z+4+4}{z^2+2z+2} + \frac{5z}{(z^2+1)(z^2+2z+2)} = \\ &= \frac{(2z+8)(z^2+1)}{(z^2+1)(z^2+2z+2)} + \frac{5z}{(z^2+1)(z^2+2z+2)} = \\ &= \frac{2z^3+8z^2+7z+8}{(z^2+1)(z^2+2z+2)}. \end{aligned}$$

La función $Y(z)$ tiene cuatro polos simples, $z_1 = i$, $z_2 = -i$, $z_3 = -1+i$ y $z_4 = -1-i$. Para hallar la transformada inversa podemos sumar los residuos de la función $e^{tz}Y(z)$ o realizar una descomposición en fracciones simples, ambas formas de resolver el problema son razonables.

- Por el método de fracciones simples buscaremos coeficientes

$$\frac{2z^3+8z^2+7z+8}{(z^2+1)(z^2+2z+2)} = \frac{Az+B}{z^2+1} + \frac{C(z+1)+D\cdot 1}{(z+1)^2+1^2}.$$

  y sabremos entonces que $y(t) = A\cos t + B\operatorname{sen} t + Ce^{-t}\cos t + De^{-t}\operatorname{sen} t$. Igualando numeradores

$$\begin{aligned} 2z^3+8z^2+7z+8 &= (Az+B)(z^2+2z+2) + (Cz+C+D)(z^2+1) = \\ &= Az^3+2Az^2+2Az+Bz^2+2Bz+2B+ \\ &\quad +Cz^3+Cz+Cz^2+C+Dz^2+D = \\ &= (A+C)z^3+(2A+B+C+D)z^2+ \\ &\quad +(2A+2B+C)z+(2B+C+D). \end{aligned}$$

  En el sistema resultante

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} A & & & + & C & & & = & 2 \\ 2A & + & B & + & C & + & D & = & 8 \\ 2A & + & 2B & + & C & & & = & 7 \\ & & 2B & + & C & + & D & = & 8 \end{array}$$

  restamos la segunda ecuación a la cuarta y deducimos que $B = 2A$. Si restamos la primera a la tercera obtenemos que $A + 2B = 5$, y por lo tanto $A = 1$ y $B = 2$. De la primera ecuación despejamos $C = 1$ y de la última $D = 3$. La solución de problema es, por lo tanto,

$$y(t) = \cos t + 2\operatorname{sen} t + e^{-t}\cos t + 3e^{-t}\operatorname{sen} t.$$

Es sencillo comprobar que la solución es correcta. Derivando

$$\begin{aligned} y'(t) &= -\operatorname{sen} t + 2\cos t + (-1+3)e^{-t}\cos t + (-1-3)e^{-t}\operatorname{sen} t = \\ &= 2\cos t - \operatorname{sen} t + 2e^{-t}\cos t - 4e^{-t}\operatorname{sen} t = \\ y''(t) &= -2\operatorname{sen} t - \cos t + (-2-4)e^{-t}\cos t + (-2+4)e^{-t}\operatorname{sen} t = \\ &= -\cos t - 2\operatorname{sen} t - 6e^{-t}\cos t + 2e^{-t}\operatorname{sen} t. \end{aligned}$$

Entonces, sustituyendo

$$\begin{aligned} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) &= (-1+4+2)\cos t + (-2-2+4)\operatorname{sen} t + \\ &\quad +(-6+4+2)e^{-t}\cos t + (2-8+6)e^{-t}\operatorname{sen} t = \\ &= 5\cos t. \end{aligned}$$

Además las condiciones iniciales se cumplen, puesto que $y(0) = 1 + 2\cdot 0 + 1 + 3\cdot 0 = 2$ e $y'(0) = 2 - 0 + 2 - 4\cdot 0 = 4$.

- Para resolver mediante el teorema de los residuos tenemos que aplicar que

$$\begin{aligned} y(t) &= \operatorname{Res}(e^{tz}Y(z), i) + \operatorname{Res}(e^{tz}Y(z), -i) + \\ &\quad + \operatorname{Res}(e^{tz}Y(z), -1+i) + \operatorname{Res}(e^{tz}Y(z), -1-i). \end{aligned}$$

Para calcular el primer residuo tomamos

$$g(z) = (z-i)e^{tz}Y(z) = e^{tz}\frac{(z-i)(2z^3+8z^2+7z+8)}{(z-i)(z+i)(z^2+2z+2)} = e^{tz}\frac{2z^3+8z^2+7z+8}{(z+i)(z^2+2z+2)}$$

y

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(e^{tz}Y(z), i) &= g(i) = e^{it}\cdot\frac{2i^3+8i^2+7i+8}{(i+i)(i^2+2i+2)} = \\ &= e^{it}\cdot\frac{-2i-8+7i+8}{(2i)(-1+2i+2)} = e^{it}\cdot\frac{5i}{(2i)(1+2i)} = \\ &= e^{it}\cdot\frac{5(1-2i)}{2(1+2i)(1-2i)} = e^{it}\cdot\frac{5(1-2i)}{2(1^2+2^2)} = \\ &= e^{it}\cdot\frac{1-2i}{2} = e^{it}\cdot\frac{1}{2} + e^{it}\cdot\frac{2}{2i}. \end{aligned}$$

Con un procedimiento análogo calculamos el residuo en $z_2 = -i$, donde

$$g(z) = (z+i)e^{tz}Y(z) = e^{tz}\frac{(z+i)(2z^3+8z^2+7z+8)}{(z-i)(z+i)(z^2+2z+2)} = e^{tz}\frac{2z^3+8z^2+7z+8}{(z-i)(z^2+2z+2)}$$

y

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(e^{tz}Y(z),-i) &= g(-i) = e^{-it}\cdot\frac{2(-i)^3+8(-i)^2+7(-i)+8}{(-i-i)((-i)^2+2(-i)+2)} = \\
&= e^{-it}\cdot\frac{2i-8-7i+8}{(-2i)(-1-2i+2)} = e^{-it}\cdot\frac{-5i}{(-2i)(1-2i)} = \\
&= e^{-it}\cdot\frac{5(1+2i)}{2(1-2i)(1+2i)} = e^{-it}\cdot\frac{5(1+2i)}{2(1^2+(-2)^2)} = \\
&= e^{-it}\cdot\frac{1+2i}{2} = e^{-it}\cdot\frac{1}{2} - e^{-it}\cdot\frac{2}{2i}.
\end{aligned}$$

Para $z_3 = -1+i$ la función $g(z)$ es

$$\begin{aligned}
g(z) &= (z+1-i)e^{tz}Y(z) = \\
&= e^{tz}\frac{(z+1-i)(2z^3+8z^2+7z+8)}{(z^2+1)(z+1-i)(z+1+i)} = \\
&= e^{tz}\frac{2z^3+8z^2+7z+8}{(z^2+1)(z+1+i)}
\end{aligned}$$

Sustituyendo en el punto $z_3 = -1+i$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(e^{tz}Y(z),-1+i) &= g(-1+i) = \\
&= e^{(-1+i)t}\cdot\frac{2(-1+i)^3+8(-1+i)^2+7(-1+i)+8}{((-1+i)^2+1)(-1+i+1+i)} = \\
&= e^{-t}e^{it}\cdot\frac{2(-1+3i+3-i)+8(1-2i-1)-7+7i+8}{((-1)^2-2i+i^2+1)(2i)} = \\
&= e^{-t}e^{it}\cdot\frac{4+4i-16i-7+7i+8}{(1-2i)(2i)} = \\
&= e^{-t}e^{it}\cdot\frac{5-5i}{(1-2i)(2i)} = e^{-t}e^{it}\cdot\frac{5(1-i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)(2i)} = \\
&= e^{-t}e^{it}\cdot\frac{5(1-i)(1+2i)}{(1^2+(-2)^2)(2i)} = e^{-t}e^{it}\cdot\frac{(1-i)(1+2i)}{2i} = \\
&= e^{-t}e^{it}\cdot\frac{1+2i-i-2i^2}{2i} = e^{-t}e^{it}\cdot\frac{3+i}{2i} = \\
&= e^{-t}e^{it}\cdot\frac{1}{2} + e^{-t}e^{it}\cdot\frac{3}{2i}.
\end{aligned}$$

Ya sólo falta un residuo, el correspondiente a $z_4 = -1-i$. En este polo la función $g(z)$

ha de ser

$$\begin{aligned} g(z) &= (z+1+i)e^{tz}Y(z) = \\ &= e^{tz}\frac{(z+1+i)(2z^3+8z^2+7z+8)}{(z^2+1)(z+1-i)(z+1+i)} = \\ &= e^{tz}\frac{2z^3+8z^2+7z+8}{(z^2+1)(z+1-i)}. \end{aligned}$$

El cuarto residuo buscado es

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}(e^{tz}Y(z),-1-i) &= g(-1-i) = \\ &= e^{(-1-i)t}\cdot\frac{2(-1-i)^3+8(-1-i)^2+7(-1-i)+8}{((-1-i)^2+1)(-1-i+1-i)} = \\ &= e^{-t}e^{-it}\frac{2(-1-3i+3+i)+8(1+2i-1)-7-7i+8}{((-1)^2+2i+(-i)^2+1)(-2i)} = \\ &= e^{-t}e^{-it}\cdot\frac{4-4i+16i-7-7i+8}{(1+2i)(-2i)} = \\ &= e^{-t}e^{-it}\cdot\frac{5+5i}{(1+2i)(-2i)} = e^{-t}e^{-it}\cdot\frac{5(1+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)(-2i)} = \\ &= e^{-t}e^{-it}\cdot\frac{5(1+i)(1-2i)}{(1^2+2^2)(-2i)} = e^{-t}e^{-it}\cdot\frac{(1+i)(1-2i)}{-2i} = \\ &= e^{-t}e^{-it}\cdot\frac{1-2i+i-2i^2}{-2i} = e^{-t}e^{-it}\cdot\frac{3-i}{-2i} = \\ &= e^{-t}e^{-it}\cdot\frac{1}{2} - e^{-t}e^{-it}\cdot\frac{3}{2i}. \end{aligned}$$

Sumando los cuatro residuos deducimos que la solución de la ecuación diferencial es

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathrm{Res}(e^{tz}Y(z),i) + \mathrm{Res}(e^{tz}Y(z),-i) + \\ &\quad + \mathrm{Res}(e^{tz}Y(z),-1+i) + \mathrm{Res}(e^{tz}Y(z),-1-i) = \\ &= e^{it}\cdot\frac{1}{2} + e^{it}\cdot\frac{2}{2i} + e^{-it}\cdot\frac{1}{2} - e^{-it}\cdot\frac{2}{2i} + \\ &\quad + e^{-t}e^{it}\cdot\frac{1}{2} + e^{-t}e^{it}\cdot\frac{3}{2i} + e^{-t}e^{-it}\cdot\frac{1}{2} - e^{-t}e^{-it}\cdot\frac{3}{2i} = \\ &= \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} + 2\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} + e^{-t}\frac{e^{it}+e^{-it}}{2} + 3e^{-t}\cdot\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} = \\ &= \cos t + 2\operatorname{sen} t + e^{-t}\cos t + 3e^{-t}\operatorname{sen} t. \end{aligned}$$

Como no podía ser de otra forma, la solución coincide con la que se obtiene mediante la técnica de descomposición en fracciones simples.