1. Encuentra una parametrización de la elipse de ecuación
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \text{ con } a,b>0.$$

2. Calcula los residuos de las siguientes funciones en sus singularidades e indica de qué tipo son dichas singularidades.

   a) $\dfrac{1}{z^3-z^5}$ *b*) $\dfrac{z^2}{(z^2+1)^2}$ *c*) $\dfrac{1}{z(1-z^2)}$

   d) $\dfrac{\operatorname{sen} z}{\cos z}$ *e*) $\dfrac{1}{\operatorname{sen} z}$ *f*) $\operatorname{sen}(z^2)\cdot\operatorname{sen}(1/z)$

   g) $\dfrac{e^{2z}}{(z-1)^2}$ *h*) $z\cos(1/z)$ *i*) $\dfrac{1}{z+z^2}$

   j) $f(z)=\dfrac{\operatorname{sen} z}{(z+1)^3}$ *k*) $f(z)=e^{-1/z}$ *l*) $f(z)=\dfrac{z-\operatorname{sen} z}{z}$

   m) $f(z)=\dfrac{z^2+1}{(z+1)^3(z+i)}$ *n*) $f(z)=e^{1/(z-2i)}$ *o*) $f(z)=\dfrac{z^2-1}{z^2+2}$

3. Dada la curva $\gamma(t)=e^{i\,t}$, con $t\in[0,2\pi]$, calcula las integrales
$$a)\ \int_\gamma \frac{1}{z-2}\,dz \qquad b)\ \int_\gamma \frac{1}{z}\,dz \qquad c)\ \int_\gamma \frac{\operatorname{sen}(e^z)}{z}\,dz$$

4. Calcula la integral
$$\int_T \operatorname{Re} z\,dz$$
si T es el triángulo de vértices $P_1=0$, $P_2=1+i$ y $P_3=2$.

5. Calcula las integrales
$$a)\ \int_\gamma \overline{z}\,dz \qquad b)\ \int_\gamma \overline{z}\cdot|z|\,dz \qquad c)\ \int_\gamma z\,dz \qquad d)\ \frac{z^2+2}{(z+i)^3}$$
a lo largo de la curva γ construida con el semicírculo $\{z\in\mathbb{C}/|z|=1, \operatorname{Im} z\geq 0\}$ cerrado mediante el segmento $\{z\in\mathbb{C}/-1\leq\operatorname{Re} z\leq 1, \operatorname{Im} z=0\}$.

6. Sea $\gamma(t)=i+e^{it}$, con $t\in[0,2\pi]$. Calcula la integral
$$\int_\gamma \frac{z\cdot e^z}{(z-i)^3}\,dz$$

7. Se considera la función $f(z)=\operatorname{sen}(\overline{z})$.

   a) Calcula los puntos de $\mathbb{C}$ para los cuales $f(z)$ es holomorfa.

   b) Halla el valor de la integral de f a lo largo del triángulo con vértices en los puntos $P_1=0$, $P_2=1+i$ y $P_3=-1+i$.

8. Se considera la función $f(z) = 1/(z^2+9)$. Estudia si $f(z)$ es holomorfa en el interior de las siguientes curvas

   a) $\gamma(t) = 3i + e^{it}$, con $t \in [0, 2\pi]$ *b)* $\gamma(t) = -2i + 2e^{it}$, con $t \in [0, 2\pi]$

   c) $\gamma(t) = 4e^{it}$, con $t \in [0, 2\pi]$ *d)* $\gamma(t) = e^{it}$, con $t \in [0, 2\pi]$

9. Estudia si $f(z) = e^z/(z(1-z)^3)$ es holomorfa en el interior de γ para

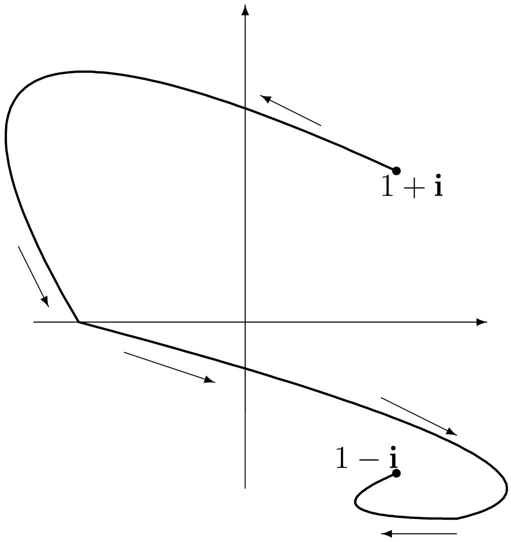
   a) $\gamma(t) = \beta e^{it}$, con $t \in [0, 2\pi]$ y $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, $\beta \neq 1$

   b) $\gamma(t) = 1 + \beta e^{it}$, con $t \in [0, 2\pi]$ y $\beta \in \mathbb{R}$, $0 < \beta < 1$

10. Sea γ la circunferencia de centro en el punto $z_0 = 1$ y radio $r = 1/2$. Calcula

    a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{1/z}}{z-1}\,dz$ *b)* $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{1/z}}{(z-1)^2}\,dz$

11. Sea γ la curva dada por la gráfica



    recorrida en el sentido que marcan las flechas. Calcula las integrales

    a) $\displaystyle\int_\gamma e^z\,dz$ *b)* $\displaystyle\int_\gamma \operatorname{sen} z\,dz$ *c)* $\displaystyle\int_\gamma \cos z\,dz$ *d)* $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz$

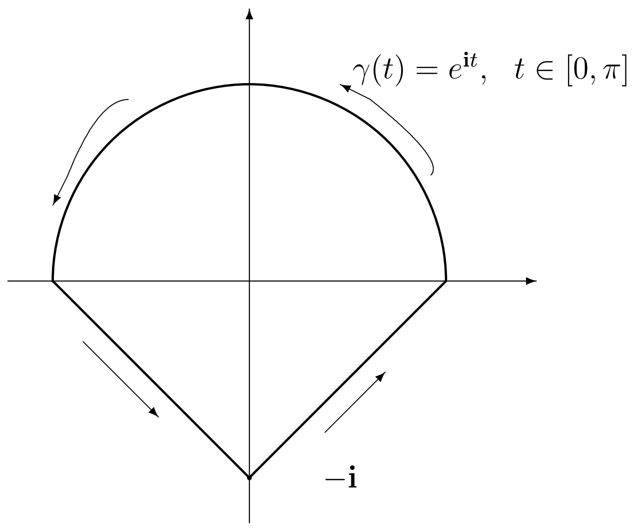
12. Calcula la integral

$$\int_\gamma \cos\left(\frac{1}{z+2i}\right)\,dz$$

    donde γ es la elipse de ecuación $x^2/4 + y^2 = 1$.

13. Calcula la integral
$$\int_\gamma \frac{z}{(z-1)(z-2)}\,dz$$
siendo $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, la curva $\gamma(t) = 2 + (1/2)e^{it}$.

14. Sea γ la curva



recorrida en el sentido que indican las flechas. Calcula la integral
$$\int_\gamma \overline{z} \cdot |z|^2\,dz$$

15. Calcula las integrales siguientes en la circunferencia de centro en $z_0 = 0$ y de radio $r = 3$.
$$a)\ \int_\gamma \frac{e^{-z}}{z^2}\,dz \qquad b)\ \int_\gamma z^2 e^{1/z}\,dz \qquad c)\ \int_\gamma \frac{z+1}{z^2-2z}\,dz$$

16. Calcula el valor de la integral
$$\int_\gamma \frac{e^{1/z}}{i\cdot z+2}\,dz$$
siendo γ el cuadrado de vértices $\pm 1 \pm i$.

17. Calcula la integral
$$\int_\gamma \left(\frac{\cos(1/z)}{z} + \frac{1}{z-1}\right) dz, \text{ donde } \gamma(t) = 2e^{it}, t \in [0, 2\pi].$$

18. Sea γ la circunferencia centrada en $z_0 = 0$ y de radio R (con $R > 0$ y $R \neq 1$). Calcula en función de R la integral
$$\int_\gamma \frac{\cos(z+1)}{z(z+1)}\,dz$$

19. Calcula
$$\int_\gamma \left(z - z^2 + \frac{1}{2z} + \frac{z+2i}{z^2+4} \right) dz,$$
siendo γ la circunferencia centrada en el origen y de radio unidad.

20. Sea γ la circunferencia centrada en el origen y de radio $R > 0$. Calcula en función de R la integral
$$\int_\gamma \frac{e^{-z}}{z^2(z^2-2)}\, dz.$$
Nota: Hay que descartar que la curva pase por una singularidad

21. Sea γ el cuadrado de vértices $\pm a \pm a \cdot i$, con $a > 0$. Calcula en los casos en los que tenga sentido la integral $\int_\gamma f(z)\, dz$ para
$$a)\quad f(z) = \frac{z+1}{z^2(z-2+i)} \qquad b)\quad f(z) = \frac{\operatorname{sen} z^2}{z(z^2+1)} \qquad c)\quad f(z) = \frac{e^{1/z}}{2z}$$

22. Sea γ la circunferencia de centro 1 y radio $r > 0$. Calcula en los casos en los que tenga sentido la integral $\int_\gamma f(z)\, dz$ para
$$a)\quad f(z) = \frac{z-1}{z^3-z} \qquad b)\quad f(z) = \frac{z^2}{z(z^2+a^2)},\ a > 0$$

23. Calcula $\int_\gamma f(z)\, dz$ en función de r, y especifica en qué casos tiene sentido, si γ es la circunferencia de centro $z_0 = 0$ y radio r y si γ es la semicircunferencia cerrada de centro $z_0 = 0$ y radio r en el semiplano $\operatorname{Im} z \geq 0$.
$$a)\quad f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} \qquad b)\quad f(z) = ze^{1/(z-1)}$$

24. Sea γ el segmento que une los números complejos $z_1 = 1+i$ y $z_2 = 2-i$. Calcula
$$\int_\gamma (\overline{z} + \cos z)\, dz$$

25. Calcula las siguientes integrales sobre los caminos indicados
$$a)\quad \int_{\gamma_1} \frac{1}{z^2 \cdot (z-1) \cdot (z-3)^2}\, dz \qquad \gamma_1(t) = 2e^{it} \qquad t \in [0, 2\pi]$$
$$b)\quad \int_{\gamma_2} ze^{1/(z-2)}\, dz \qquad \gamma_2(t) = 1 + 2e^{it} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

26. Calcula las siguientes integrales reales
$$a)\quad \int_0^{2\pi} \frac{1}{(a+\cos x)^2}\, dx,\ (a>1) \qquad b)\quad \int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2a\cos x + a^2}\, dx,\ (a>1)$$
$$c)\quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{5-4\cos x}\, dx \qquad d)\quad \int_0^{2\pi} \frac{2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x}{5-4\cos x}\, dx$$
$$e)\quad \int_0^{2\pi} \frac{1}{5-3\operatorname{sen} x}\, dx \qquad f)\quad \int_0^{2\pi} \frac{1}{(5-3\operatorname{sen} x)^2}\, dx$$