1. Calcula el valor de los logaritmos:

$$a)\ L_\theta(3i) \qquad b)\ L_\theta(-2i) \qquad c)\ L_\theta(1+i) \qquad d)\ L_\theta(-1-i) \qquad e)\ L_\theta(-1)$$

para $\theta = 0$ y $\theta = \pi$.

2. Calcula los siguientes valores

$$a)\ e^i \qquad b)\ e^{-1+i} \qquad c)\ e^{2-i\pi/2} \qquad d)\ e^{L_{\pi-3}(1-i)}$$
$$e)\ \operatorname{sen}(3i) \qquad f)\ \operatorname{sen}(1+i) \qquad g)\ \cos(-2i) \qquad h)\ \cos(-1-i)$$

3. Demuestra que si $z = x + iy$, entonces $|e^z| = e^x$ y $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$.

4. Estudia los puntos en los que no están definidas las funciones

$$a)\ f(z) = \frac{1}{1-z} \qquad b)\ f(z) = \frac{1}{z^2+1/2} \qquad c)\ f(z) = \frac{1+z^2}{z-i}$$
$$d)\ f(z) = e^{-1/z} \qquad e)\ f(z) = \frac{z^5+1}{z^2+4} \qquad f)\ f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z-3)}$$
$$g)\ f(z) = \frac{2z+1}{z(z^2+1)} \qquad h)\ f(z) = \frac{z^3+i}{z^2-3z+2} \qquad i)\ f(z) = \frac{z^2+1}{(z+2)(z^2+2z+2)}$$

5. Sea $f(z) = \arg z$, con el argumento medido en el intervalo $(\theta-\pi, \theta+\pi]$. Demuestra que $f(z)$ no es continua en la semirrecta $H_\theta = \{z \in \mathbb{C} / \arg(z) = \theta + \pi\}$. Razona por qué el logaritmo $L_\theta(z) = \log|z| + i \cdot \arg z$, con argumento medido en el intervalo $(\theta-\pi, \theta+\pi]$, tampoco es continuo en H_θ.

6. Utiliza la derivada de la función compuesta para obtener la derivada del logaritmo $L_\theta(z)$ en el conjunto $\mathbb{C} \setminus H_\theta$.

7. Resuelve las ecuaciones

$$a)\ e^z = 1+i \qquad b)\ \operatorname{sen} z = 4 \qquad c)\ \cos z = 4$$
$$d)\ 2\cos z - i \operatorname{sen} z = i \qquad e)\ 2\operatorname{sen} z - i\cos z = i$$

8. Calcula, a partir de las condiciones de Cauchy-Riemann, las derivadas de las funciones

$$a)\ f(z) = e^z \qquad b)\ f(z) = \operatorname{sen} z \qquad c)\ f(z) = \cos z \qquad d)\ f(z) = ize^z$$

9. Estudia si las siguientes funciones definidas en $\mathbb{C}$ son holomorfas y en caso afirmativo calcula $f'(z)$

$$a)\ f(z) = \overline{z} \cdot \operatorname{Im} z \qquad b)\ f(z) = z \cdot \operatorname{Im} z \qquad c)\ f(x+iy) = e^{-y}e^{ix}$$
$$d)\ f(z) = z \cdot \overline{z} \qquad e)\ f(z) = (z^2-2)e^{-z} \qquad f)\ f(x+iy) = e^{y}e^{ix}$$
$$g)\ f(z) = (z^2+\cos z)e^z \qquad h)\ f(z) = \operatorname{sen} 2z + i \qquad i)\ f(x+iy) = xy + iy$$

10. Determina los valores $x, y \in \mathbb{R}$ que satisfacen la igualdad
$$x + iy = (x - iy)^2$$

11. Calcula los valores de los parámetros reales α, β y γ para que sea entera (holomorfa en todo $\mathbb{C}$) e identifica como función de z la función
$$f(z) = \text{Re } z + \alpha \cdot \text{Im } z + i(\beta \cdot \text{Re } z + \gamma \cdot \text{Im } z)$$

12. Identifica como función $f(z)$ la función holomorfa
$$f(x + i \cdot y) = -2 - x^2 - y - 4xy + y^2 + i \cdot (1 + x + 2x^2 - 2xy - 2y^2).$$

13. Una función $u : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se dice que es *armónica* en el conjunto abierto D si es de clase $C^2(D)$ (existen sus derivadas parciales de orden dos y son funciones continuas) y verifica la relación
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0 \ \forall z \in D.$$
Dada una función holomorfa $f : D \to \mathbb{C}$, comprueba que las funciones parte real $u(x, y) = \text{Re } f(x + iy)$ y parte imaginaria $v(x, y) = \text{Im } f(x + iy)$ son armónicas en D. **Nota:** Supón, aunque posteriormente veremos que esta suposición es superflua, que las funciones parte real y parte imaginaria de f son de clase $C^2(D)$.

14. Expresa Re $(e^{1/z})$ en términos de x e y y prueba que esta función es armónica en el conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

15. Sea $f(x+iy) = u(x, y)+iv(x, y)$ una función entera, siendo $u, v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Explica por qué las funciones $U(x, y) = e^{u(x,y)} \cos v(x, y)$ y $V(x, y) = e^{u(x,y)} \operatorname{sen} v(x, y)$ son armónicas en D, y porqué $V(x, y)$, es de hecho, una armónica conjugada de $U(x, y)$.

16. Comprueba que las siguientes funciones son armónicas, encuentra las correspondientes funciones holomorfas $f(x + i \cdot y) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ e identifícalas como funciones $f(z)$.

    a) $u(x, y) = 2x(1 - y)$ *b)* $u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$

    c) $u(x, y) = 2e^x \cos y$ *d)* $u(x, y) = y/(x^2 + y^2)$

    e) $u(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ *f)* $u(x, y) = \arctan y/x$

    g) $v(x, y) = 4x - 4x^2 - 3y - 2xy + 3x^2y + 4y^2 - y^3$

17. Comprueba que las siguientes funciones son armónicas, encuentra la correspondiente función holomorfa $f(x + i \cdot y) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ e identifícala como función $f(z)$.

    a) $u(x, y) = x/(x^2 + y^2)$ con $f(\pi) = 1/\pi$

    b) $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2x$ con $f(i) = 2i - 1$

    c) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ con $f(1) = 1$

    d) $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2xy - x + 3$ con $f(2 - i) = -8i$

18. Estudia qué valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ hacen que las siguientes funciones sean armónicas, cuando lo sean encuentra las correspondientes funciones holomorfas $f(x + i \cdot y) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ e identifícalas como funciones $f(z)$.

$$a)\ u(x, y) = a \cdot x^2 + b \cdot y^2 - xy + 2x + 3y - 1$$

$$b)\ v(x, y) = ax^3y - 4xy^3 \qquad c)\ u(x, y) = x^3 + axy^2$$

$$d)\ u(x, y) = y^3 + ax^2y \qquad e)\ v(x, y) = ax^3 - 4xy^3$$

19. Calcula el desarrollo en serie de potencias centrado en el punto z_0 y el radio de convergencia de las series

$$a)\ \operatorname{sen} z, z_0 = i \qquad b)\ e^z, z_0 = i \qquad c)\ \frac{1}{1-z}, z_0 = 0 \qquad d)\ \frac{z^2}{z+2}, z_0 = 0$$

$$e)\ \frac{z}{z+2}, z_0 = 1 \qquad f)\ L_\pi(z), z_0 = -1 \qquad g)\ \frac{z}{1+z^2}, z_0 = 0 \qquad h)\ \frac{\operatorname{sen} z}{z}, z_0 = 0$$

20. Identifica las siguientes funciones en los conjuntos en los que las series convergen

$$a)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{4n} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot z^n \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \qquad d)\ \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot z^n$$

21. Halla $f^{(20)}(1)$ para la función $f(z) = 1/(1 + z^2)$.

22. Calcula la serie de potencias de la función

$$f(z) = \frac{1}{z-2}$$

centrada en el origen válida en el círculo $\{z \in \mathbb{C}/|z| < 2\}$, y la de Laurent centrada en el origen válida en el anillo $\{z \in \mathbb{C}/|z| > 2\}$. Repite el razonamiento anterior para desarrollar nuevamente $f(z)$ como serie centrada en el punto $z_0 = i$ de dos formas distintas, y estudia sus dominios de convergencia.

23. Determina la serie de Laurent de la función $f(z) = 1/(z(1 - z))$ alrededor de los puntos $z_0 = 0$, $z_0 = 1$ y $z_0 = i$.

24. Calcula la serie de Laurent de las siguientes funciones alrededor de los puntos que se indican:

$$a)\ f(z) = z^2 e^{1/z},\ z_0 = 0 \qquad b)\ f(z) = e^{1/(1-z)},\ z_0 = 1$$

$$c)\ f(z) = \cos(1/z),\ z_0 = 0 \qquad d)\ f(z) = z \operatorname{sen}(1/(z-1)),\ z_0 = 1$$

$$e)\ f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2},\ z_0 = i \qquad f)\ f(z) = z - z^2 + \frac{1}{2z} + \frac{z+2i}{z^2+4},\ z_0 = 0$$

25. Para las siguientes funciones estudia e identifica el tipo de las singularidades, y calcula la serie de Laurent alrededor de dichas singularidades y su correspondiente radio de convergencia

$$a)\ \frac{\operatorname{sen} z}{z} \qquad b)\ \frac{z}{z^2+4} \qquad c)\ \frac{1}{z^2} \qquad d)\ \frac{z}{(z^2-2z+2)^2} \qquad e)\ \frac{1}{z^2 \cdot (z^2+2z+5)}$$

26. Construye la serie de Laurent centrada en el origen y convergente en 1/2 de la función
$$f(z) = \frac{z^3}{(z-1)(z-2)}$$

27. Construye la serie de Laurent de la función
$$f(z) = \cos\left(\frac{z^2-4z}{(z-2)^2}\right)$$
centrada en $z_0 = 2$.

28. Construye la serie de Laurent de la función dada en las tres regiones determinadas por un anillo
$$a)\quad f(z) = \frac{z}{(z-2)(z-4)}, \quad A(0,2,4)$$
$$b)\quad f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}, \quad A(0,1,2)$$
$$c)\quad f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2i)}, \quad A(0,1,2)$$