

Variable Compleja y Transformadas
Segundo Curso, I.T. Industrial (Electricidad y Electrónica)
Examen de operaciones básicas, xxx de xxx de 2005

1. Calcula el módulo de $\frac{4-i}{4+i}$.

Solución: Por las propiedades del módulo

$$\left| \frac{4-i}{4+i} \right| = \frac{|4-i|}{|4+i|} = \frac{\sqrt{16+1}}{\sqrt{16+1}} = 1.$$

2. Calcula el argumento de $-3-3i$.

Solución: El número complejo $-3-3i$ está situado en el tercer cuadrante. El argumento φ se calcula teniendo en cuenta que

$$\varphi = \arctan \frac{-3}{-3} + \pi = \arctan 1 + \pi = \pi/4 + \pi = 5\pi/4.$$

3. Escribe $-1-i$ en forma exponencial.

Solución: El argumento φ del número $-1-i$ se calcula al igual que en el caso anterior como

$$\varphi = \arctan \frac{-1}{-1} + \pi = \arctan 1 + \pi = \pi/4 + \pi = 5\pi/4.$$

Entonces, dicho número en forma exponencial se escribe como

$$-1-i = |-1-i|e^{i\varphi} = \sqrt{2}e^{i5\pi/4}.$$

4. Escribe $2e^{4\pi i}$ en forma binómica.

Solución: Basta considerar que

$$2e^{4\pi i} = 2[\cos(4\pi) + i\sin(4\pi)] = 2[1 + i0] = 2.$$

5. Escribe $\frac{1}{2-2i}$ en forma binómica.

Solución: Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado de $2-2i$ y obtenemos

$$\frac{1}{2-2i} = \frac{2+2i}{(2-2i)(2+2i)} = \frac{2+2i}{8} = \frac{1}{4} + i\frac{1}{4}.$$

6. Escribe $(-i)^{1500}$ en forma binómica.

Solución: Como $1500 = 4 \cdot 375$, tenemos que

$$(-i)^{1500} = ((-i)^4)^{375} = 1^{375} = 1.$$

7. Calcula $(2+2\sqrt{3}i)^{23}$.

Solución: El número $2+2\sqrt{3}i$ tiene por módulo $|2+2\sqrt{3}i| = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$ y por argumento $\varphi = \arctan \frac{2\sqrt{3}}{2} = \arctan \sqrt{3} = \pi/3$, al estar en el primer cuadrante. Entonces

$$\begin{aligned} (2+2\sqrt{3}i)^{23} &= (4e^{i\pi/3})^{23} = 4^{23}e^{i23\pi/3} = 4^{23}e^{i5\pi/3} \\ &= 4^{23}(\cos(5\pi/3) + i\sin(5\pi/3)) \\ &= 4^{23}(\cos(-\pi/3) + i\sin(-\pi/3)) \\ &= 4^{23}(\cos(\pi/3) - i\sin(\pi/3)) \\ &= 4^{23}(1/2 - i\sqrt{3}/2). \end{aligned}$$

8. Calcula $\sqrt[4]{-2 + 2\sqrt{3}i}$.

Solución: El número $-2 + 2\sqrt{3}i$ tiene por módulo $|-2 + 2\sqrt{3}i| = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$ y por argumento $\varphi = \arctan \frac{2\sqrt{3}}{-2} = \arctan -\sqrt{3} = 2\pi/3$, al estar en el segundo cuadrante. Entonces los argumentos de las raíces cuartas de $-2 + 2\sqrt{3}i$ son

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \frac{2\pi/3 + 0 \cdot 2\pi}{4} = 2\pi/12 = \pi/6. \\ \varphi_2 &= \frac{2\pi/3 + 1 \cdot 2\pi}{4} = 8\pi/12 = 2\pi/3. \\ \varphi_3 &= \frac{2\pi/3 + 2 \cdot 2\pi}{4} = 14\pi/12 = 7\pi/6. \\ \varphi_4 &= \frac{2\pi/3 + 3 \cdot 2\pi}{4} = 20\pi/12 = 5\pi/3.\end{aligned}$$

Entonces las raíces son

$$\begin{aligned}r_1 &= \sqrt[4]{4}e^{i\pi/6} = \sqrt{2}[\cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6)] = \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}. \\ r_2 &= \sqrt[4]{4}e^{i2\pi/3} = \sqrt{2}[\cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3)] = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}. \\ r_3 &= \sqrt[4]{4}e^{i7\pi/6} = \sqrt{2}[\cos(7\pi/6) + i\sin(7\pi/6)] = -\frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}. \\ r_4 &= \sqrt[4]{4}e^{i5\pi/3} = \sqrt{2}[\cos(5\pi/3) + i\sin(5\pi/3)] = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}.\end{aligned}$$

9. Calcula $(5 + 7i) \cdot (-2 + i)$.

Solución: Multiplicamos

$$(5 + 7i) \cdot (-2 + i) = -10 - 7 + i(5 - 14) = -17 - 9i.$$

10. Calcula $\frac{5 - 2i}{-1 + 4i}$ en forma biómica.

Solución: Multiplicamos denominador y numerador por $-1 - 4i$ y obtenemos

$$\frac{5 - 2i}{-1 + 4i} = \frac{(5 - 2i)(-1 - 4i)}{(-1 + 4i)(-1 - 4i)} = \frac{-13 - 18i}{17} = -\frac{13}{17} - i\frac{18}{17}.$$

Nota: Los requisitos para aprobar la asignatura son: tener más de 7 preguntas correctas en la parte de **ejercicios básicos** y obtener una puntuación mínima de 5 puntos en la parte de **problemas**.

Variable Compleja y Transformadas
Segundo Curso, I.T.I. Electricidad y Electrónica
Examen de problemas, xxx de xxx de 2005

1. Contestar de forma razonada a las siguientes cuestiones:

- a) (1 punto) Demostrar que si $z = x + iy$, entonces $|e^z| = e^x$ y $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$.

Solución: Por un lado

$$|e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x| \cdot |\cos y + i \sin y| = e^x$$

ya que $e^x > 0$ y $|\cos y + i \sin y| = \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = 1$. Por otra parte

$$\begin{aligned}\overline{e^z} &= \overline{e^{x+iy}} = \overline{e^x(\cos y + i \sin y)} = e^x(\cos y - i \sin y) \\ &= e^x[\cos(-y) + i \sin(-y)] = e^{x-iy} = e^{\bar{z}}.\end{aligned}$$

- b) (1 punto) Encontrar todas las soluciones de la ecuación $e^z = 1 + i$.

Solución: Como vimos en el apartado anterior

$$|e^z| = e^x = |1 + i| = \sqrt{2},$$

de donde

$$x = \log \sqrt{2}.$$

Por otro lado, como

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y) = \sqrt{2} \cos y + i\sqrt{2} \sin y = 1 + i,$$

tenemos que

$$\begin{aligned}\cos y &= \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin y &= \frac{\sqrt{2}}{2},\end{aligned}$$

de donde $y = \pi/4 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Las soluciones de la ecuación serán por tanto

$$z = \log \sqrt{2} + i(\pi/4 + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Otro método: Como $e^z = 1 + i$, entonces

$$\begin{aligned}z &\in \operatorname{Log}(1 + i) = \{\log |1 + i| + i \arg(1 + i)\} \\ &= \{\log \sqrt{2} + i(\pi/4 + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}\}.\end{aligned}$$

2. Calcular las siguientes integrales:

- a) (1 punto) $\int_0^\infty \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$.

Solución: En primer lugar, hemos de hacer notar que

$$\int_0^\infty \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$$

ya que la función $f(x) = \frac{x^2+1}{x^4+1}$ es par [$f(x) = f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$]. Las singularidades de $f(x)$ verifican que $x^4 = -1$, por lo que serán las raíces cuartas de -1 , que son

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt[4]{1}e^{i(\pi+0\cdot 2\pi)/4} = e^{i\pi/4} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ r_2 &= \sqrt[4]{1}e^{i(\pi+1\cdot 2\pi)/4} = e^{i3\pi/4} = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ r_3 &= \sqrt[4]{1}e^{i(\pi+2\cdot 2\pi)/4} = e^{i5\pi/4} = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ r_4 &= \sqrt[4]{1}e^{i(\pi+3\cdot 2\pi)/4} = e^{i7\pi/4} = \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Así

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx = 2\pi i [\text{Res}(f, r_1) + \text{Res}(f, r_2)].$$

Todas las singularidades son polos de orden 1 por lo que

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, r_1) &= \lim_{z \rightarrow r_1} (z - r_1) \frac{z^2+1}{z^4+1} = \lim_{z \rightarrow r_1} \frac{z^2+1}{(z-r_2)(z-r_3)(z-r_4)} \\ &= \frac{r_1^2+1}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)(r_1-r_4)} = \frac{i+1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+i\sqrt{2})i\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1+i}{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \frac{(1+i)(-\sqrt{2}-i\sqrt{2})}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{4}i \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, r_2) &= \lim_{z \rightarrow r_2} (z - r_2) \frac{z^2+1}{z^4+1} = \lim_{z \rightarrow r_2} \frac{z^2+1}{(z-r_1)(z-r_3)(z-r_4)} \\ &= \frac{r_2^2+1}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)(r_2-r_4)} = \frac{-i+1}{-\sqrt{2}i\sqrt{2}(-\sqrt{2}+i\sqrt{2})} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1-i}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \frac{(1-i)(\sqrt{2}-i\sqrt{2})}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{4}i, \end{aligned}$$

de donde

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx = 2\pi i \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}i - \frac{\sqrt{2}}{4}i \right) = \pi\sqrt{2}.$$

Finalmente

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx = \pi \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

b) (1 punto) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cdot \text{sen} ax}{x^2+b^2} dx, \quad a, b > 0.$

Solución: Como sabemos,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cdot \text{sen} ax}{x^2+b^2} dx = \text{Im} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cdot e^{iax}}{x^2+b^2} dx \right),$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cdot e^{iax}}{x^2+b^2} dx = 2\pi i \text{Res}(f, bi),$$

donde $f(z) = \frac{z \cdot e^{iaz}}{z^2 + b^2}$ y bi es el polo con parte imaginaria positiva de $f(z)$, que es un polo de orden 1. Calculamos

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, bi) &= \lim_{z \rightarrow bi} (z - bi) \frac{z \cdot e^{iaz}}{z^2 + b^2} = \lim_{z \rightarrow bi} \frac{z \cdot e^{iaz}}{z + bi} \\ &= \frac{bi \cdot e^{iabi}}{2bi} = e^{-ab}/2. \end{aligned}$$

Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cdot \text{sen} ax}{x^2 + b^2} dx = \text{Im} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cdot e^{iax}}{x^2 + b^2} dx \right) = \text{Im}(2\pi i e^{-ab}/2) = \pi e^{-ab}.$$

3. Sea γ la circunferencia de centro 1 y radio $r > 0$. Calcula en los casos en los que tenga sentido la integral $\int_{\gamma} f(z) dz$

a) (1 punto) Para $f(z) = \frac{z-1}{z^3-z}$.

Solución: Las singularidades de la función $f(z) = \frac{z-1}{z^3-z}$ son las raíces de $z^3 - z$, que son 0, 1 y -1 . Calculemos los residuos de f en dichas singularidades. Para $z_0 = 0$, tenemos que

$$\lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{z-1}{z(z^2-1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z-1}{z^2-1} = 1,$$

con lo que 0 es un polo de orden uno y $\text{Res}(f, 0) = 1$. Para $z_0 = 1$, tenemos que

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z(z-1)(z+1)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{z^2+z} = 1/2,$$

con lo que 1 es una singularidad evitable y $\text{Res}(f, 1) = 0$. Para $z_0 = -1$, tenemos que

$$\lim_{z \rightarrow -1} (z+1)f(z) = \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) \frac{z-1}{z(z-1)(z+1)} = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{z-1}{z(z-1)} = -1,$$

con lo que -1 es un polo de orden uno y $\text{Res}(f, -1) = -1$.

Por otra parte, sabemos que las distancias del centro de la circunferencia a las singularidades son $d_1 = |0 - 1| = 1$, $d_2 = |1 - 1| = 0$ y $d_3 = |-1 - 1| = 2$, por lo que:

- Si $r < 1$, la única singularidad dentro de la circunferencia será 1 y entonces

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f, 1) = 0.$$

- Si $1 < r < 2$, las singularidades 1 y 0 estarán dentro de la circunferencia y entonces

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i [\text{Res}(f, 1) + \text{Res}(f, 0)] = 2\pi i.$$

- Si $r > 2$, todas las singularidades estarán dentro de la circunferencia y se tiene entonces que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i [\text{Res}(f, 1) + \text{Res}(f, 0) + \text{Res}(f, -1)] = 0.$$

- Si $r = 1$ ó $r = 2$, la integral no tiene sentido al anularse el denominador sobre la curva.

b) (2 punto) Para $f(z) = \frac{z^2}{z(z^2 + a^2)}$, $a > 0$.

Solución: Las singularidades de la función $f(z) = \frac{z^2}{z(z^2 + a^2)}$ son 0 , ai y $-ai$. Calculemos los residuos de f en dichas singularidades. Para $z_0 = 0$, tenemos que

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{z(z^2 + a^2)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{z^2 + a^2} = 0,$$

con lo que 0 es una singularidad evitable y $\text{Res}(f, 0) = 0$. Para $z_0 = ai$, tenemos que

$$\lim_{z \rightarrow ai} (z - ai)f(z) = \lim_{z \rightarrow ai} (z - ai) \frac{z^2}{z(z + ai)(z - ai)} = \lim_{z \rightarrow ai} \frac{z}{z + ai} = 1/2,$$

con lo que ai es un polo de orden uno y $\text{Res}(f, ai) = 1/2$. Para $z_0 = -ai$, tenemos que

$$\lim_{z \rightarrow -ai} (z + ai)f(z) = \lim_{z \rightarrow -ai} (z + ai) \frac{z^2}{z(z + ai)(z - ai)} = \lim_{z \rightarrow -ai} \frac{z}{z - ai} = 1/2,$$

con lo que $-ai$ es un polo de orden uno y $\text{Res}(f, -ai) = 1/2$.

Por otra parte, sabemos que las distancias del centro de la circunferencia a las singularidades son $d_1 = |0 - 1| = 1$, $d_2 = |ai - 1| = \sqrt{1 + a^2}$ y $d_3 = |-ai - 1| = \sqrt{1 + a^2}$, por lo que:

- Si $r < 1$, $f(z)$ es derivable en el interior de la circunferencia y por el Teorema de Cauchy

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

- Si $1 < r < \sqrt{1 + a^2}$, la única singularidad dentro de la circunferencia será 0 y entonces

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f, 0) = 0.$$

- Si $r > \sqrt{1 + a^2}$, todas las singularidades estarán dentro de la circunferencia y se tiene entonces que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i [\text{Res}(f, ai) + \text{Res}(f, 0) + \text{Res}(f, -ai)] = 2\pi i.$$

- Si $r = 1$ ó $r = \sqrt{1 + a^2}$, la integral no tiene sentido al anularse el denominador sobre la curva.

4. (3 puntos) Utiliza la transformada de Laplace para resolver la ecuación integro-diferencial

$$y'(t) + 2y(t) + 1 + 2 \int_0^t y(s) ds = f(t)$$

con la condición inicial $y(0) = 2$, donde $f(t) = (h_0(t) - h_2(t))t$ donde a su vez $h_a(t)$, $a > 0$ denota la función de Heaviside.

Solución: Aplicamos la transformada de Laplace a la ecuación anterior y por las propiedades de la misma obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f(t)](z) &= \mathcal{L}\left[y'(t) + 2y(t) + 1 + 2 \int_0^t y(s)ds\right](z) \\
&= \mathcal{L}[y'(t)](z) + \mathcal{L}[2y(t)](z) + \mathcal{L}[1](z) + \mathcal{L}\left[2 \int_0^t y(s)ds\right](z) \\
&= z\mathcal{L}[y(t)](z) - y(0) + 2\mathcal{L}[y(t)](z) + \frac{1}{z} + 2\frac{\mathcal{L}[y(t)](z)}{z} \\
&= \frac{z^2 + 2z + 2}{z}\mathcal{L}[y(t)](z) + \frac{1}{z} - 2 \\
&= \frac{z^2 + 2z + 2}{z}\mathcal{L}[y(t)](z) + \frac{1 - 2z}{z}.
\end{aligned}$$

Calculamos aparte

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f(t)](z) &= \int_0^\infty e^{-zt}f(t)dt = \int_0^\infty e^{-zt}(h_0(t) - h_2(t))tdt \\
&= \int_0^2 e^{-zt}tdt = \left[-t\frac{e^{-zt}}{z}\right]_0^2 + \frac{1}{z}\int_0^2 e^{-zt}tdt \\
&= -2\frac{e^{-2z}}{z} + \left[-\frac{e^{-zt}}{z^2}\right]_0^2 = -2\frac{e^{-2z}}{z} - \frac{e^{-2z}}{z^2} + \frac{1}{z^2} \\
&= -e^{-2z}\frac{2z+1}{z^2} + \frac{1}{z^2}.
\end{aligned}$$

Entonces

$$-e^{-2z}\frac{2z+1}{z^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{z^2 + 2z + 2}{z}\mathcal{L}[y(t)](z) + \frac{1 - 2z}{z},$$

de donde

$$\frac{z^2 + 2z + 2}{z}\mathcal{L}[y(t)](z) = -e^{-2z}\frac{2z+1}{z^2} + \frac{1}{z^2} - \frac{1 - 2z}{z} = -e^{-2z}\frac{2z+1}{z^2} + \frac{2z^2 - z + 1}{z^2}$$

y despejando $\mathcal{L}[y(t)](z)$ tenemos

$$\mathcal{L}[y(t)](z) = -e^{-2z}\frac{2z+1}{z(z^2 + 2z + 2)} + \frac{2z^2 - z + 1}{z(z^2 + 2z + 2)}.$$

Tomando transformadas inversas

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[-e^{-2z}\frac{z+1}{z(z^2 + 2z + 2)}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3z-1}{z(z^2 + 2z + 2)}\right](t).$$

Las singularidades para ambas funciones son las raíces de $z(z^2 + 2z + 2)$, que son 0 y $-1 \pm i$. Sean

$$F_1(z) = -\frac{2z+1}{z(z^2 + 2z + 2)}$$

y

$$F_2(z) = \frac{2z^2 - z + 1}{z(z^2 + 2z + 2)}.$$

Calculamos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}[F_1(z)](t) &= \text{Res}(e^{zt}F_1(z), 0) + \text{Res}(e^{zt}F_1(z), -1+i) + \text{Res}(e^{zt}F_1(z), -1-i) \\
&= \lim_{z \rightarrow 0} ze^{zt}F_1(z) + \lim_{z \rightarrow -1+i} (z+1-i)e^{zt}F_1(z) + \lim_{z \rightarrow -1-i} (z+1+i)e^{zt}F_1(z) \\
&= \lim_{z \rightarrow 0} -e^{zt} \frac{2z+1}{z^2+2z+2} + \lim_{z \rightarrow -1+i} -e^{zt} \frac{2z+1}{z(z+1+i)} + \lim_{z \rightarrow -1-i} -e^{zt} \frac{2z+1}{z(z+1-i)} \\
&= -\frac{1}{2} - e^{-t+it} \frac{2i-1}{(-1+i)2i} - e^{-t-it} \frac{-2i-1}{(-1-i)(-2i)} \\
&= -\frac{1}{2} - \frac{e^{-t}}{2i} \left((\cos t + i \sin t) \frac{(2i-1)(-1-i)}{2} + (\cos t - i \sin t) \frac{(-2i-1)(-1+i)}{-2} \right) \\
&= -\frac{1}{2} - \frac{e^{-t}}{2i} \left((\cos t + i \sin t) \frac{3-i}{2} - (\cos t - i \sin t) \frac{3+i}{2} \right) \\
&= -\frac{1}{2} - e^{-t} \left(-\frac{1}{2} \cos t + \frac{3}{2} \sin t \right) = \frac{1}{2}(-1 - 3e^{-t} \sin t + e^{-t} \cos t).
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}[F_2(z)](t) &= \text{Res}(e^{zt}F_2(z), 0) + \text{Res}(e^{zt}F_2(z), -1+i) + \text{Res}(e^{zt}F_2(z), -1-i) \\
&= \lim_{z \rightarrow 0} ze^{zt}F_2(z) + \lim_{z \rightarrow -1+i} (z+1-i)e^{zt}F_2(z) + \lim_{z \rightarrow -1-i} (z+1+i)e^{zt}F_2(z) \\
&= \lim_{z \rightarrow 0} e^{zt} \frac{2z^2-z+1}{z^2+2z+2} + \lim_{z \rightarrow -1+i} e^{zt} \frac{2z^2-z+1}{z(z+1+i)} + \lim_{z \rightarrow -1-i} e^{zt} \frac{2z^2-z+1}{z(z+1-i)} \\
&= \frac{1}{2} + e^{-t+it} \frac{2-5i}{(-1+i)2i} + e^{-t-it} \frac{2+5i}{(-1-i)(-2i)} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{e^{-t}}{2i} \left((\cos t + i \sin t) \frac{(2-5i)(-1-i)}{2} + (\cos t - i \sin t) \frac{(2+5i)(-1+i)}{-2} \right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{e^{-t}}{2i} \left((\cos t + i \sin t) \frac{-7+3i}{2} - (\cos t - i \sin t) \frac{-7-3i}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{e^{-t}}{2i} (3i \cos t - i7 \sin t) = \frac{1}{2}(1 + 3e^{-t} \cos t - 7e^{-t} \sin t).
\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F_1(z)](t-2)h_2(t) + \mathcal{L}^{-1}[F_2(z)](t) \\
&= h_2(t) \frac{1}{2}(-1 - 3e^{-t+2} \sin(t-2) + e^{-t+2} \cos(t-2)) \\
&\quad + \frac{1}{2}(1 + 3e^{-t} \cos t - 7e^{-t} \sin t).
\end{aligned}$$

Nota: Los requisitos para aprobar la asignatura son: tener más de 7 preguntas correctas en la parte de **ejercicios básicos** y obtener una puntuación mínima de 5 puntos en la parte de **problemas**.