

Ecuaciones en diferencia

Jose S. Cánovas

10 de enero de 2022

Índice general

1. Ecuaciones en diferencia	5
1.1. Ecuaciones lineales	5
1.1.1. Ecuaciones lineales con coeficientes constantes	6
1.1.2. Estabilidad de ecuaciones lineales	11
1.2. Ecuaciones no lineales de orden 1	12
1.2.1. Puntos fijos	14
1.2.2. Puntos periódicos	18
1.2.3. Más allá del comportamiento periódico	22
1.2.4. Caracterización de la complejidad topológica: entropía	25
1.2.5. Observación de la complejidad: exponentes de Lyapunov.	31
1.3. Bibliografía	34

Capítulo 1

Ecuaciones en diferencia

1.1. Ecuaciones lineales

Una ecuación en diferencias es una expresión de la forma

$$x_{n+k} = f(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}, \dots, x_n, n), \quad (1.1)$$

donde $f : \Omega \subset \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función que supondremos al menos continua. Ejemplos de ecuaciones en diferencias son

$$x_{n+2} = x_{n+1}x_n + \frac{n}{n^2 + 1}, \quad (1.2)$$

$$x_{n+3} = x_{n+2} - x_n, \quad (1.3)$$

$$x_{n+1} = nx_n. \quad (1.4)$$

Se llama orden de la ecuación a k . Así la ecuación (1.2) tiene orden 2, (1.3) orden 3 y (1.4) orden uno. Distinguimos entre ecuación autónoma cuando el tiempo n no aparece explícitamente en la ecuación, y no autónoma cuando sí lo hace. Las ecuaciones (1.2) y (1.4) son no autónomas mientras que (1.3) sí lo es. Por último, distinguiremos entre ecuaciones lineales, cuando la función f es lineal o afín como las ecuaciones (1.3) y (1.4), y las no lineales como (1.2). Dentro de las lineales trataremos especialmente las que tienen coeficientes constantes, como la ecuación (1.3) de las que tienen coeficientes dependientes de n como (1.4).

Si se asume la continuidad de la función f , para construir una solución de una ecuación de orden k se precisan exactamente k condiciones iniciales

$x_0, x_1, \dots, x_{k-1} \in \mathbb{R}$. A las soluciones de las ecuaciones también las llamaremos órbitas. El orden puede verse entonces como en número mínimo de condiciones necesarias para poder construir una solución u órbita de la ecuación. La sucesión de Fibonacci

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots)$$

es la órbita o solución de la ecuación en diferencias de orden dos

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$$

con condición inicial $x_0 = x_1 = 1$.

Como veremos posteriormente, el estudio de las soluciones de ecuaciones en diferencia no lineales es complicado. Vamos a ver a continuación cómo calcular las soluciones de ecuaciones lineales con coeficientes constantes.

1.1.1. Ecuaciones lineales con coeficientes constantes

Podemos escribir la ecuación lineal con coeficientes constantes de la forma

$$x_{n+k} + a_1 x_{n+k-1} + a_2 x_{n+k-2} + \dots + a_{k-1} x_{n+1} + a_k x_n = g(n),$$

donde $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$, $a_k \neq 0$, y g es una función real. Si la función $g(n) = 0$, diremos que la ecuación es homogénea y no homogénea en caso contrario.

Llamamos solución general de la ecuación en diferencias a una expresión de la forma

$$x_n = F(n, c_1, \dots, c_k)$$

donde c_1, \dots, c_k son constantes que dependen de las condiciones iniciales, de manera que para cada valor n la función $F(n, c_1, \dots, c_k)$ nos da el término n -ésimo de la sucesión solución. Veamos a continuación cómo obtener la solución general de una ecuación lineal homogénea de la forma

$$x_{n+k} + a_1 x_{n+k-1} + a_2 x_{n+k-2} + \dots + a_{k-1} x_{n+1} + a_k x_n = 0. \quad (1.5)$$

Dado $r \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, tomamos la sucesión $x_n = r^n$ y veamos que tiene que pasar para que sea solución de la ecuación (1.5). Sustituyendo en la misma tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= x_{n+k} + a_1 x_{n+k-1} + a_2 x_{n+k-2} + \dots + a_{k-1} x_{n+1} + a_k x_n \\ &= r^{n+k} + a_1 r^{n+k-1} + a_2 r^{n+k-2} + \dots + a_{k-1} r^{n+1} + a_k r^n \\ &= r^n (r^k + a_1 r^{k-1} + a_2 r^{k-2} + \dots + a_{k-1} r + a_k) = r^n p(r), \end{aligned}$$

donde

$$p(r) := r^k + a_1 r^{k-1} + a_2 r^{k-2} + \dots + a_{k-1} r + a_k$$

se llama polinomio característico de la ecuación (1.5). De la ecuación

$$0 = r^n p(r)$$

se tiene que $x_n = r^n$ es solución si y sólo si

$$p(r) = 0,$$

es decir, si es un cero del polinomio característico de la ecuación (1.5).

Por ejemplo, tomemos la ecuación

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0,$$

cuyo polinomio característico es

$$p(r) = r^2 - r - 1.$$

Sus raíces se calculan como

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Así, dos soluciones de dicha ecuación son

$$x_n^1 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

y

$$x_n^2 = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

No es posible obtener más soluciones, por lo que éstas deben de ser suficientes para obtener la solución general. Para ello, necesitamos el siguiente resultado.

Teorema 1 *El \mathcal{S} conjunto de soluciones de la ecuación lineal*

$$x_{n+k} + a_1 x_{n+k-1} + a_2 x_{n+k-2} + \dots + a_{k-1} x_{n+1} + a_k x_n = 0$$

es un espacio vectorial de dimensión k .

Demostración. El conjunto de las sucesiones reales x_n es un espacio vectorial con las operaciones suma y producto por escalares naturales. Dadas las soluciones x_n e y_n y los escalares α, β , la sucesión $\alpha x_n + \beta y_n$ verifica que

$$\begin{aligned} & \alpha x_{n+k} + \beta y_{n+k} + a_1(\alpha x_{n+k-1} + \beta y_{n+k-1}) + \dots \\ & + (\alpha x_{n+1} + \beta y_{n+1})a_{k-1} + a_k(\alpha x_n + \beta y_n) \\ = & \alpha(x_{n+k} + a_1x_{n+k-1} + \dots + a_{k-1}x_{n+1} + a_kx_n) \\ & + \beta(y_{n+k} + a_1y_{n+k-1} + \dots + a_{k-1}y_{n+1} + a_ky_n), \end{aligned}$$

que será igual a cero ya que

$$x_{n+k} + a_1x_{n+k-1} + \dots + a_{k-1}x_{n+1} + a_kx_n = 0$$

e

$$y_{n+k} + a_1y_{n+k-1} + \dots + a_{k-1}y_{n+1} + a_ky_n = 0$$

por ser solución. Por lo tanto es solución de la ecuación, y \mathcal{S} es un subespacio vectorial. Como cada solución viene definida por k condiciones iniciales, y \mathbb{R}^k tiene dimensión k , el conjunto \mathcal{S} también tiene dimensión k . \square

Por lo tanto, para la ecuación

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0$$

se verifica que la solución general es de la forma

$$x_n = c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Para el caso de la sucesión de Fibonacci, con condición inicial 1 y 1, se tendrá que

$$\begin{aligned} x_0 = 1 &= c_1 + c_2, \\ x_1 = 1 &= c_1 \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + c_2 \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \end{aligned}$$

de donde

$$c_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, \quad c_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}},$$

de donde

$$x_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}} \right) \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Cuando las soluciones no son reales o son múltiples no es posible seguir esta estrategia ya que se necesitan más soluciones linealmente independientes para formar una base. Para conseguirlas se procederá de la siguiente manera:

1. Si r es una raíz real de $p(r)$ de multiplicidad m , tenemos las soluciones linealmente independientes $r^n, nr^n, n^2r^n, \dots, n^{m-1}r^n$.
2. Si $r = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ y $\bar{r} = \rho(\cos \theta - i \sin \theta)$ son una raíces complejas de $p(r)$ de multiplicidad m , tenemos las soluciones linealmente independientes $\rho^n \cos(n\theta), \rho^n \sin(n\theta), n\rho^n \cos(n\theta), n\rho^n \sin(n\theta), \dots, n^{m-1}\rho^n \cos(n\theta), n^{m-1}\rho^n \sin(n\theta)$.

Por ejemplo, la ecuación

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n = 0$$

tiene polinomio característico

$$p(r) = r^2 - 2r + 2$$

con raíces $r = 1 \pm i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \pm i \sin \frac{\pi}{4} \right)$, y su solución general será

$$x_n = \left(\sqrt{2} \right)^n \left(c_1 \cos \left(\frac{n\pi}{4} \right) + c_2 \sin \left(\frac{n\pi}{4} \right) \right).$$

La ecuación

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0$$

tiene polinomio característico

$$p(r) = r^2 - 4r + 4,$$

con raíz $r = 2$, por lo que la solución general será

$$x_n = c_1 2^n + c_2 n 2^n.$$

Este método tiene la limitación práctica de tener que resolver la ecuación polinómica $p(r) = 0$, por lo que en principio, sólo es posible resolver de esta manera ecuaciones de orden bajo, o aquellas con una forma concreta. Es u problema generalizado ya que cualquier otro método, como el de usar la transformada Z, precisa de la resolución de este tipo de ecuaciones.

Una vez resuelta la ecuación homogénea, supongamos la ecuación no homogénea

$$x_{n+k} + a_1 x_{n+k-1} + a_2 x_{n+k-2} + \dots + a_{k-1} x_{n+1} + a_k x_n = g(n), \quad (1.6)$$

con $g(n) \neq 0$. El siguiente resultado nos dice cómo son las soluciones.

Teorema 2 *Las soluciones de la ecuación (1.6) son de la forma*

$$x_n = x_n^h + x_n^p,$$

donde x_n^h es la solución de la ecuación homogénea asociada y x_n^p es una solución particular de la ecuación no homogénea.

Demostración. Suponiendo conocida una solución particular de la ecuación no homogénea x_n^p , sea x_n otra solución. Definimos $y_n = x_n - x_n^p$, y veamos que es solución de la ecuación homogénea asociada, con lo que se probaría el resultado. Sustituimos y_n en la ecuación

$$\begin{aligned} & y_{n+k} + a_1 y_{n+k-1} + \dots + a_{k-1} y_{n+1} + a_k y_n \\ = & x_{n+k} - x_{n+k}^p + a_1 (x_{n+k-1} - x_{n+k-1}^p) + \dots + a_k (x_n - x_n^p) \\ = & (x_{n+k} + a_1 x_{n+k-1} + \dots + a_{k-1} x_{n+1} + a_k x_n) \\ & - (x_{n+k}^p + a_1 x_{n+k-1}^p + \dots + a_{k-1} x_{n+1}^p + a_k x_n^p) \\ = & g(n) - g(n) = 0, \end{aligned}$$

con lo que termina la prueba. \square

En general, no es sencillo encontrar soluciones particulares, pero es posible en los casos concretos de las posibles soluciones linealmente independientes de las ecuaciones homogéneas. El método se llama de coeficientes indeterminados que vemos con el siguiente ejemplo.

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = (-1)^n.$$

Como $g(n) = 3^n$, proponemos una solución que sea proporcional a ésta, es decir, $x_n^p = A3^n$, donde A es una constante a determinar. Sustituyendo en la ecuación tenemos

$$A(-1)^{n+2} - 4A(-1)^{n+1} + 4A(-1)^n = (-1)^n,$$

y simplificando

$$(A + 4A + 4A)(-1)^n = 9A(-1)^n = (-1)^n,$$

de donde $9A = 1$, y la solución particular es

$$x_n^p = \frac{1}{9}(-1)^n.$$

La solución general será por tanto

$$x_n = c_1 2^n + c_2 n 2^n + \frac{1}{9}(-1)^n.$$

Si tenemos la ecuación

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = \sin n,$$

tomamos como solución particular

$$x_n^p = A \sin n + B \cos n,$$

y si se trata de

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = n 3^n,$$

se tomará

$$x_n^p = (An + B)3^n.$$

Se deja como ejercicio calcular los valores A y B que dan la solución particular.

1.1.2. Estabilidad de ecuaciones lineales

Una ecuación lineal homogénea siempre tiene como solución la sucesión constante $x_n = 0$. Cualquier otra solución será de la forma

$$y_n = \sum_{i=1}^s p_i(n) r_i^n + \sum_{i=1}^r \rho_i^n (q_i(n) \cos(n\theta_i) + h_i(n) \sin(n\theta_i)),$$

donde $p_i(n)$, $q_i(n)$ y $h_i(n)$ son polinomios en n , que serán constantes si las raíces r_i o $\rho_i(\cos \theta_i + i \sin \theta_i)$ tienen multiplicidad 1. Si calculamos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

es fácil darse cuenta de que será cero si $|r_i| < 1$, $i = 1, \dots, s$ y $|\rho_i| < 1$, $i = 1, \dots, r$. En ese caso, todas las soluciones convergen a cero y el sistema se dirá asintóticamente estable. Si $|r_i| = 1$ (o $|\rho_i| = 1$) para algún i , entonces

$$p_i(n) r_i^n$$

estará acotado si $p_i(n)$ es constante, es decir, si la raíz tiene multiplicidad uno. Si todas las raíces verifican que $|r_i| \leq 1$, $i = 1, \dots, s$ y $|\rho_i| \leq 1$, $i = 1, \dots, r$, y aquellas con módulo 1 tienen multiplicidad 1, entonces el sistema se dice estable, y ninguna solución converge a infinito en módulo. En caso contrario, el sistema se dirá inestable y sí que existirán soluciones cuyo módulo crezca de forma exponencial.

Por ejemplo, la ecuación

$$x_{n+2} + x_n = 0$$

es estable, pero no asintóticamente estable,

$$x_{n+2} - \frac{x_n}{4} = 0$$

es asintóticamente estable, mientras que

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0$$

es inestable.

Si una ecuación homogénea es asintóticamente estable, entonces una ecuación no homogénea asociada tendrá la solución de la forma

$$x_n = x_n^h + x_n^p,$$

y a partir de un cierto valor de n el término homogéneo será prácticamente nulo, y por tanto despreciable. Entonces, la solución para n suficientemente grande es

$$x_n = x_n^p.$$

Este hecho es de utilidad a la hora de diseñar circuitos digitales.

1.2. Ecuaciones no lineales de orden 1

En esta sección vamos a estudiar ecuaciones en diferencia de orden uno no lineales, es decir, ecuaciones de la forma

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

donde $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \Omega$ es una función al menos continua en Ω . Ejemplos de estas ecuaciones son la ecuación logística

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n),$$

con $a \in (0, 4]$ y la función $f(x) = ax(1 - x)$ definida en el intervalo $[0, 1]$, o la de Hénon

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n, \\ y_{n+1} = bx_n, \end{cases}$$

definida en el plano con coeficientes reales.

En general las ecuaciones no lineales son más complicadas de estudiar que las lineales, pudiendo aparecer fenómenos que han dado lugar a la teoría del caos. En este curso nos centraremos en estudiar cómo es el comportamiento de las soluciones de ecuaciones en dimensión uno, es decir, de la forma

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

donde $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, donde I es un intervalo de la recta real. Tomaremos la función logística como ejemplo para hacer una guía de los elementos principales a considerar para analizar las posibles soluciones, empezando por las más sencillas posibles. Antes de ello, recordemos que dada una condición inicial $\bar{x} \in I$, la solución de la ecuación en diferencias

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n), \\ x_0 = \bar{x}, \end{cases}$$

siempre existe debido a la continuidad de la función f . A esa solución la denominaremos frecuentemente con el nombre de órbita o trayectoria de \bar{x} . Esta órbita viene dada por la sucesión

$$(\bar{x}, f(\bar{x}), f^2(\bar{x}), \dots, f^n(\bar{x}), \dots)$$

donde $f^2 = f \circ f$ y en general f^n es la composición de f consigo misma n veces. Por ejemplo, la solución de la ecuación

$$\begin{cases} x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n), \\ x_0 = 0,45, \end{cases}$$

viene dada por la sucesión

$$(0,45, 0,99, 0,0396, 0,1521, 0,5159, 0,9999, \dots),$$

donde hemos tomado aproximaciones de cuarto orden en los resultados.

1.2.1. Puntos fijos

Obviamente, las soluciones más sencillas posibles son aquellas que no cambian con el tiempo. Vienen dadas por sucesiones constantes de la forma

$$(x_0, x_0, x_0, \dots)$$

y por lo tanto deben satisfacer que

$$f(x_0) = x_0.$$

Se llama punto fijo a una solución de la ecuación anterior.

Cuando las condiciones del problema lo permiten, es posible obtener de forma exacta los puntos fijos. Por ejemplo, en el caso de la función logística $f(x) = ax(a - x)$ basta con resolver la ecuación

$$ax(1 - x) = x$$

que da lugar a las soluciones

$$\bar{x} = 0$$

y

$$\tilde{x} = \frac{a - 1}{a}.$$

Démos cuenta que \tilde{x} existirá y será distinto de cero sólo cuando $a > 1$.

Ahora bien, si la ecuación a resolver es un poco más complicada no vamos a poder obtener los puntos fijos de forma exacta y tenemos que recurrir al cálculo numérico para ello. Uno de los algoritmos disponibles para obtener la soluciones consiste en construir una sucesión de la forma

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n), \\ x_0 = \bar{x}, \end{cases}$$

donde \bar{x} es una condición inicial para construir la sucesión. Vemos que esta sucesión es una órbita de la ecuación en diferencias. A modo de ejemplo tomemos la función

$$f(x) = ax^2e^{-x},$$

cuyos puntos fijos vendrán dados por la ecuación

$$ax^2e^{-x} = x.$$

Es fácil ver que 0 es una solución. Las restantes las soluciones se obtienen a partir de la ecuación

$$axe^{-x} = 1.$$

Si tratamos de ejecutar el algoritmo con el parámetro $a = 5$ y condición inicial $x_0 = 0,45$, vemos que tras unas cuantas iteraciones llegamos a la solución o punto fijo 2,542641357773527. Sin embargo, si hacemos esto mismo con $a = 15$ veremos que no llegamos a ninguna solución. Este hecho se pone claramente de manifiesto en el diagrama de bifurcación de la figura 1.2.1:

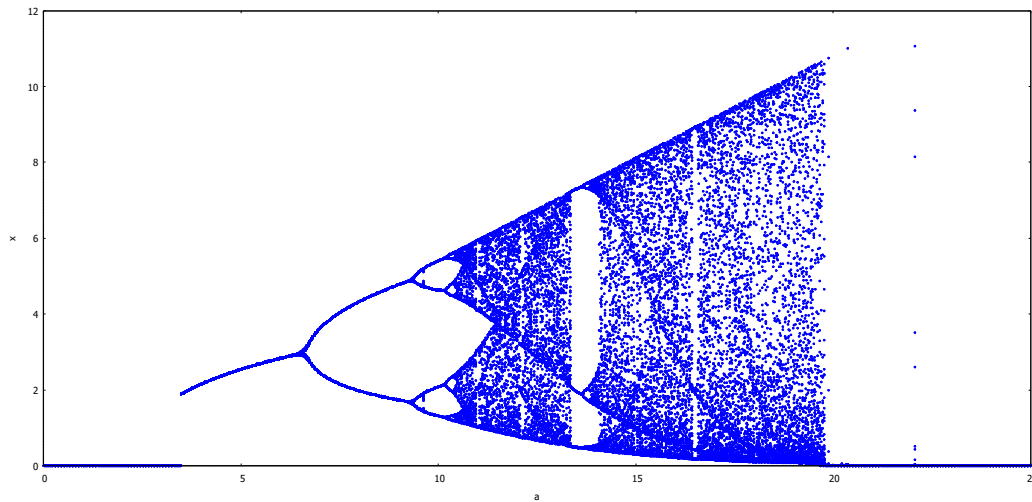


Diagrama de bifurcación de la función $f(x) = ax^2e^{-x}$ con condición inicial 0,45.

Pasemos a describir qué representa el diagrama de bifurcación. Para construirlo se procede del siguiente modo: para cada valor del parámetro a calculamos los primeros términos (en el ejemplo 100) de la órbita que empieza por la condición inicial dada (en el ejemplo 0,45), y guardamos las últimas 50 iteraciones junto con el parámetro a en pares de la forma (a, x_n) . Repetimos este proceso variando el parámetro a y se hace una representación conjunta de todos los pares. En el caso del ejemplo, hemos tomado $a \in [0, 25]$ tomando valores del parámetro de la forma $a_m = 0,25m$, $m = 1000$.

Puede observarse de la gráfica que la órbita converge a 0 hasta un valor del parámetro próximo a cuatro. Después converge a una única solución,

punto fijo, hasta aproximadamente $a = 6,5$. A partir de este valor se aprecian diferentes ramificaciones hasta llegar a la masa de puntos que puede apreciarse para valores de a mayores que 10. Hablamos de bifurcación cuando se produce un cambio significativo en las posibles órbitas de la ecuación al cambiar el parámetro. Los valores del parámetro donde se producen esos cambios se llaman puntos de bifurcación.

Retomaremos con posterioridad el estudio de las bifurcaciones. Ahora vamos a centrarnos en la razón por la cual, para algunos valores del parámetro obtenemos como solución un punto fijo, y para otros una amalgama de puntos sin orden ni concierto. Para ello necesitamos suponer que la función es de clase C^1 , es decir, podemos derivarla y su derivada es continua. Dado x_0 un punto fijo de f , calculamos su derivada $f'(x_0)$. Por el Teorema del valor medio

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0),$$

donde ξ es un punto que pertenece al intervalo cuyos extremos son x_0 y x . Como $f(x_0) = x_0$, tomando valor absoluto tenemos

$$|f(x) - x_0| = |f'(\xi)||x - x_0|.$$

distinguimos entonces los siguientes casos:

1. Si $|f'(x_0)| < 1$, entonces por la continuidad de f' existe un intervalo de la forma $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ de manera que $\xi \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, y por tanto $|f'(\xi)| < 1$. Entonces

$$|f(x) - x_0| < |x - x_0|,$$

es decir, $f(x)$ está más próximo a x_0 que x . En particular, $f(x)$ pertenece al intervalo $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Repitiendo este proceso concluimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_0$$

para todo $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Se dice que x_0 es un punto fijo localmente asintóticamente estable (LAS).

2. Si $|f'(x_0)| > 1$ tenemos la situación inversa, es decir

$$|f(x) - x_0| > |x - x_0|$$

por lo que $f(x)$ estará más lejos de x_0 que x y no habrá por tanto convergencia al punto fijo. En este caso se dirá que x_0 es un punto fijo inestable.

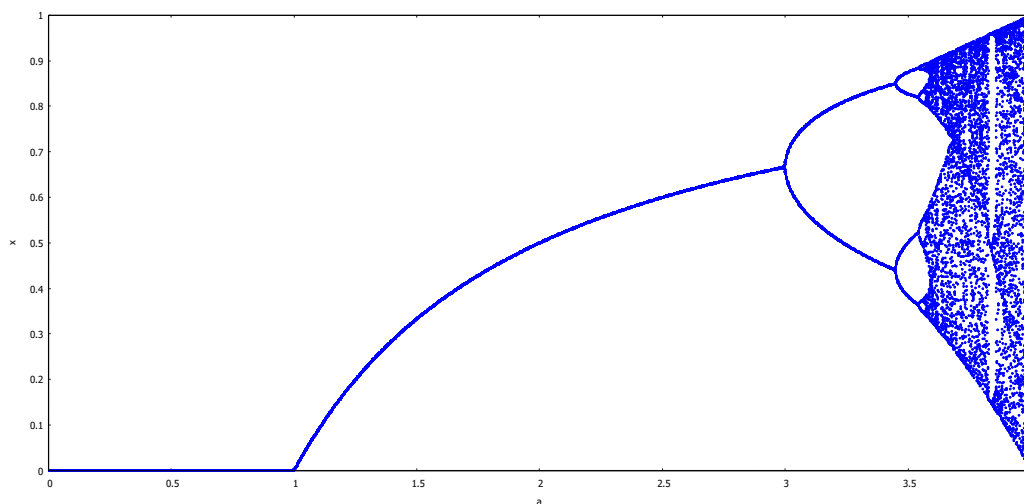


Figura 1.1: Diagrama de bifurcación de la función logística.

3. Si $|f'(x_0)| = 1$ pueden darse a priori diferentes posibilidades que deben estudiarse a partir de derivadas sucesivas y que no vamos a analizar aquí.

Decimos que x_0 es un punto fijo hiperbólico si $|f'(x_0)| \neq 1$, y no hiperbólico en el caso indeterminado $|f'(x_0)| = 1$.

Vamos a analizar la estabilidad de los puntos fijos de la función logística. Su derivada es

$$f'(x) = a(1 - 2x).$$

Entonces

$$f'(0) = a,$$

por lo que dicho punto fijo será LAS si $a < 1$. Para el otro punto fijo tenemos que

$$f'\left(\frac{1-a}{a}\right) = a\left(1 - 2\frac{1-a}{a}\right) = a - 2,$$

que será menor que 1 (nótese que siempre va a ser positivo) cuando $a < 3$. En la figura 1.1 se muestra el diagrama de bifurcación de la función logística, donde puede apreciarse la convergencia a los puntos fijos 0 y $\frac{1-a}{a}$ para los valores de los parámetros obtenidos.

Puede apreciarse en el diagrama como hay una bifurcación para el parámetro $a = 1$ pues pasamos de tener 0 como punto fijo a que éste sea $\frac{1-a}{a}$. Asimismo tenemos una bifurcación para el valor del parámetro $a = 3$. En este caso se pasa de un punto fijo a un punto periódico de periodo dos. Veremos en la próxima sección la noción de punto periódico.

1.2.2. Puntos periódicos

Como puede verse en el diagrama de la figura 1.1, cuando $a = 3$ se produce una nueva bifurcación que gráficamente muestra una ramificación. Dicha ramificación es producida por puntos periódicos de periodo dos. Para dichos puntos, la órbita es de la forma

$$(x_0, f(x_0), x_0, f(x_0), \dots).$$

Tomando $f^2 = f \circ f$, un punto será periódico de periodo dos si se cumplen las condiciones

$$f^2(x_0) = x_0 \tag{1.7}$$

y

$$x_0 \neq f(x_0).$$

En el caso de la función logística la ecuación (1.7) es de la forma

$$-a^3x^4 + 2a^3x^3 - (a^3 - a^2)x^2 + a^2x = x,$$

o equivalentemente

$$p(x) = -a^3x^4 + 2a^3x^3 - (a^3 - a^2)x^2 + (a^2 - 1)x = 0.$$

Obviamente, los puntos fijos de f verifican la ecuación, es decir, los polinomios x y $x - \frac{1-a}{a}$ dividen al polinomio $p(x)$. Entonces

$$\frac{p(x)}{x \left(x - \frac{1-a}{a} \right)} = -a^3x^2 + (a^3 + a^2)x - a^2 + a$$

por lo que la ecuación

$$-a^3x^2 + (a^3 + a^2)x - a^2 + a = 0$$

nos da los puntos periódicos de periodo dos

$$\tilde{x} = \frac{1 + a - \sqrt{a^2 - 2a - 3}}{2a}$$

y

$$\bar{x} = \frac{1 + a + \sqrt{a^2 - 2a - 3}}{2a},$$

que dan lugar a la órbita

$$(\tilde{x}, \bar{x}, \tilde{x}, \bar{x}, \tilde{x}, \bar{x}, \dots).$$

Como puede comprobarse fácilmente, el discriminante

$$a^2 - 2a - 3 > 0$$

si $a > 3$, que es precisamente el valor de bifurcación del parámetro a . Ahora bien, para que esta órbita periódica aparezca reflejada en el diagrama de bifurcación, hace falta una condición adicional. Los puntos \tilde{x} y \bar{x} son puntos fijos de la función f^2 , y para que sean LAS es preciso que

$$|(f^2)'(\tilde{x})| < 1,$$

condición que se reescribe como

$$|f'(f(\tilde{x}))f'(\tilde{x})| = |f'(\bar{x})f'(\tilde{x})| < 1.$$

Ahora bien

$$\begin{aligned} f'(\bar{x})f'(\tilde{x}) &= a^2(1 - 2\tilde{x})(1 - 2\bar{x}) \\ &= a^2 \left(1 - 2 \frac{1 + a - \sqrt{a^2 - 2a - 3}}{2a} \right) \left(1 - 2 \frac{1 + a + \sqrt{a^2 - 2a - 3}}{2a} \right) \\ &= -a^2 + 2a + 4. \end{aligned}$$

La ecuación

$$-a^2 + 2a + 4 = 1$$

da las soluciones $a = -1$ y $a = 3$, y la ecuación

$$-a^2 + 2a + 4 = -1$$

proporciona $a = 1 - \sqrt{6}$ y $a = 1 + \sqrt{6} = 3,449489742783178$. Como $a \in (0, 4]$, se concluye que el punto periódico de periodo dos es LAS para valores de a en el intervalo $(3, 1 + \sqrt{6})$.

Como puede verse, para $a \in (0, 1 + \sqrt{6})$ tenemos un único punto fijo 0 cuando $a \in (0, 1]$, dos puntos fijos, uno LAS y otro inestable cuando $a \in (1, 3)$

Este proceso se puede repetir, pudiendo apreciarse en el diagrama de bifurcación de la función logística como aparecen puntos periódicos de periodo 4, 8, 16,... En general, diremos que un punto x_0 es periódico de periodo n si se cumplen las condiciones

y

para todo número natural $m < n$. Además dicho punto periódico será LAS si

donde

es la órbita periódica que tiene a x_0 como condición inicial. Será inestable si

y no hiperbólico si

$$|f'(x_0)| \cdot |f'(x_1)| \cdot \dots \cdot |f'(x_{n-1})| = 1.$$

Además, se tiene que las órbitas periódicas coexisten, siendo algunas inestables y otras LAS. Esta coexistencia de órbitas periódicas viene caracterizada por el Teorema de Sharkovsky, uno de los resultados más sorprendentes, innovadores y elegantes del siglo XX. Para ello, hace falta ordenar a los números naturales de la siguiente forma

$$\begin{array}{lcl} 3 & \succ & 5 \succ 7 \succ 9 \succ 11 \succ \dots \\ 2 \cdot 3 & \succ & 2 \cdot 5 \succ 2 \cdot 9 \succ 2 \cdot 11 \succ \dots \\ 2^2 \cdot 3 & \succ & 2^2 \cdot 5 \succ 2^2 \cdot 9 \succ 2^2 \cdot 11 \succ \dots \\ & & \dots\dots\dots \\ \vdots & \succ & 2^4 \succ 2^3 \succ 2^2 \succ 2 \succ 1. \end{array}$$

De forma alternativa, dados dos números naturais $n = 2^{n_1} \cdot n_2$ y $m = 2^{m_1} \cdot m_2$, $n_1, m_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, n_2, m_2 números naturales impares, se tendrá que $n \succ m$ si se cumple que

1. $n_1 < m_1$, o bien
2. $n_1 = m_1$, $n_2 \neq 1$, $m_2 \neq 1$ y $n_2 < m_2$, o bien
3. $n_1 = m_1$, $n_2 \neq 1$, $m_2 = 1$, o bien
4. $n_2 = m_2 = 1$ y $n_1 > m_1$.

En este orden de los números naturales, 3 es el más grande y 1 el más pequeño. El Teorema de Sharkovsky en su versión directa afirma lo siguiente.

Teorema 3 *Sea $f : I \rightarrow I$ una función continua con un punto periódico de periodo n . Entonces la función f tiene puntos periódicos de todos los periodos m tales que $n \succ m$.*

Por ejemplo, si una función tiene un punto periódico de periodo tres, es decir, una órbita periódica de la forma

$$(x_0, x_1, x_2, x_0, x_1, x_2, \dots)$$

tiene puntos periódicos de todos los periodos posibles. Veamos cuándo pasa esto para la función logística. Para ello hemos de resolver la ecuación

$$f^3(x) = x,$$

que es equivalente a una ecuación polinómica de grado 8, aunque teniendo en cuenta que 0 y $\frac{1-a}{a}$ son soluciones se quedaría en una de grado 6. Por ello, vamos a ver que para $a = 4$ hay 6 puntos periódicos de periodo 3. Para ello, basta visualizar la gráfica conjunta de las funciones f^3 y la recta $y = x$ en la figura 1.2.

Cada punto de intersección de ambas gráficas es un punto fijo de f^3 . Como puede apreciarse hay un total de 8 intersecciones, dos de ellas puntos fijos. Las seis restantes deben ser puntos periódicos de periodo 3, lo que nos da las 2 órbitas periódicas de periodo 3. La existencia de órbitas periódicas de periodo $2^n \cdot m$, con $m \neq 1$ serán un indicativo de la existencia de órbitas caóticas en el sistema, cuestión que será analizada en la siguiente sección.

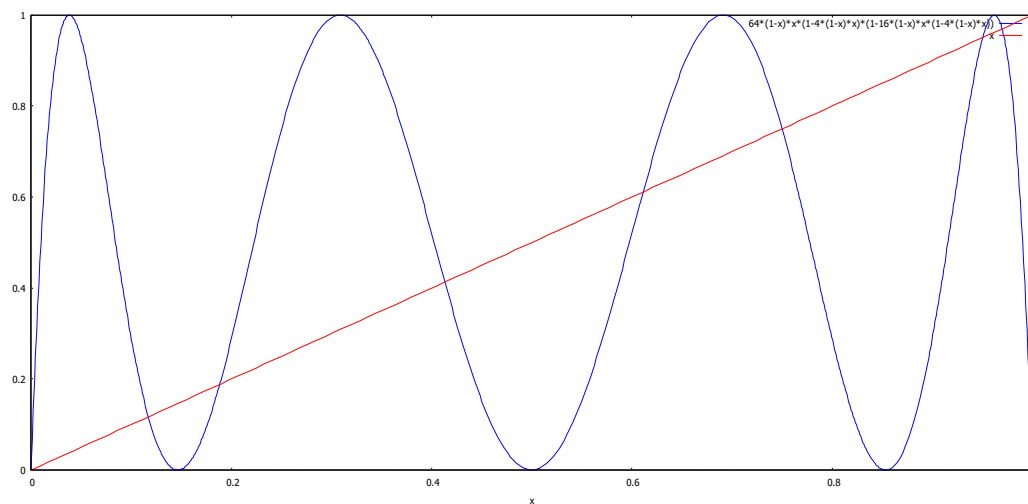


Figura 1.2: Gráficas de f^3 e $y = x$.

1.2.3. Más allá del comportamiento periódico

Como puede comprobarse en el diagrama de bifurcación de la función logística, a partir de valores del parámetro en torno a 3.6, empieza a apreciarse que deja de haber en apariencia órbitas periódicas. Por ejemplo, para $a = 3.8$, la figura 1.3 muestra los primeros 1000 valores de la órbita que empieza en $1/2$.

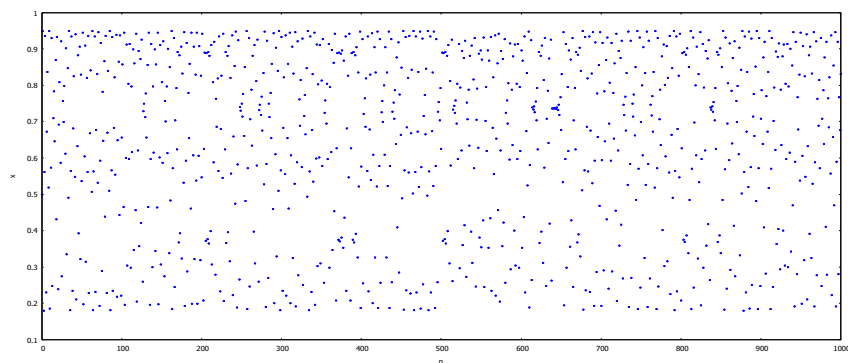


Figura 1.3: Serie temporal de los 1000 primeros términos de la órbita de f .

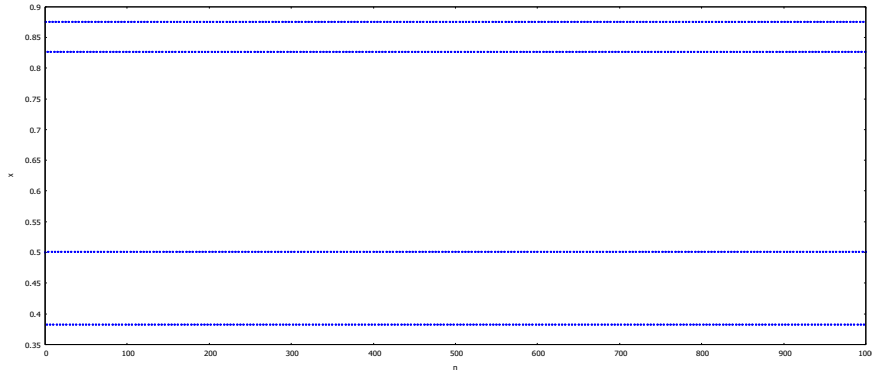


Figura 1.4: Primeros 1000 términos de la órbita de $1/2$ para $a = 3,5$.

Está claro por la gráfica que no puede inferirse ningún tipo de regularidad en esta órbita, todo lo contrario de una órbita con convergencia a un punto periodico como puede verse en la gráfica 1.4 para el valor del parámetro $a = 3,5$.

En el primer caso, tenemos un comportamiento caótico, y por tanto impredecible, mientras que en el segundo es periódico. Vamos a tratar de explicar porqué el comportamiento para el parámetro 3,8 puede decirse que es caótico, más allá de la gráfica anterior.

En primer lugar, debemos de introducir el concepto de ω -límite de una órbita. Consideremos la órbita de una función f con condición inicial x_0 . El conjunto ω -límite de x_0 bajo la iteración de la función f es de los elementos x tales que existe una sucesión estrictamente creciente de números naturales m_n de forma que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{m_n}(x_0) = x.$$

Denotaremos este conjunto por $\omega(x_0, f)$. En el caso de funciones con ω -límites son periódicos la dinámica es sencilla. Por supuesto, una función puede tener infinitos ω -límites distintos, pero para funciones reales continuas sólo pueden ser de uno de los siguientes tipos.

- T1. Una órbita periódica.
- T2. Un conjunto fractal, tipo Cantor. No es necesario precisar mucho este tipo de conjuntos porque, aunque aparecen y son frecuentes, no son detectables mediante simulacion numérica.

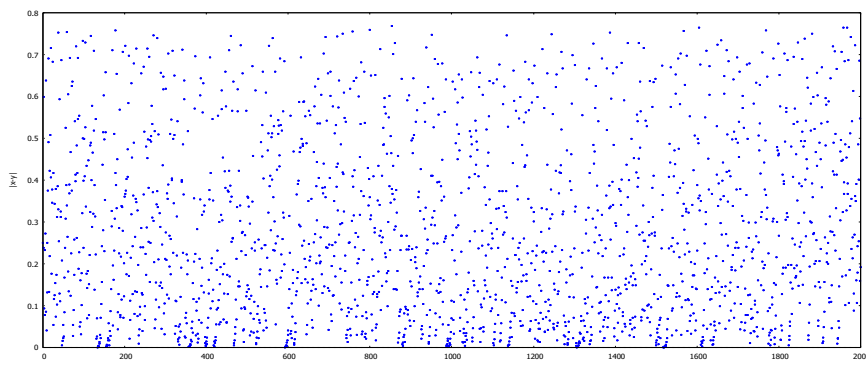


Figura 1.5: Serie temporal de la diferencia entre dos órbitas. Puede apreciarse como hay valores próximos a cero, mientras que otros no los son.

T3. Una unión finita de subintervalos disjuntos dos a dos, $\cup_{i=1}^n I_i$ tales que $f^n(I_i) = I_i$ y $f^m(I_i) = I_j$, $j \neq i$, para $m < n$ y $i = 1, 2, \dots, n$. Es decir, son intervalos periódicos.

La dinámica será caótica cuando hay ω -límites de los tipos T2 y T3, aunque con una salvedad. Si hay de tipo T3 la dinámica es caótica, pero no siempre hay un comportamiento complicado cuando hay sólo del tipo T2.

Es fácil darse cuenta de que la dinámica es sencilla, pero es más complicado definir exactamente qué es el comportamiento caótico. De hecho, existen distintas definiciones de caos, y distintas maneras de caracterizarlo. Aquí vamos a centrarnos en la de Li y Yorke. Una función continua f se dice caótica (en el sentido de Li y Yorke) si existen dos condiciones iniciales x_0 e y_0 y dos sucesiones estrictamente crecientes de números naturales a_n y b_n de forma que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f^{a_n}(x_0) - f^{a_n}(y_0)| = 0$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f^{b_n}(x_0) - f^{b_n}(y_0)| = \gamma > 0,$$

es decir, existen momentos en que las órbitas están muy cerca, y otros en los que se alejan. La grafica 1.5 muestra la serie temporal de $|f^n(x_0) - f^n(y_0)|$ para la función logística con parámetro $a = 3,8$ y condiciones iniciales $x_0 = 0,5$ e $y_0 = 0,75$.

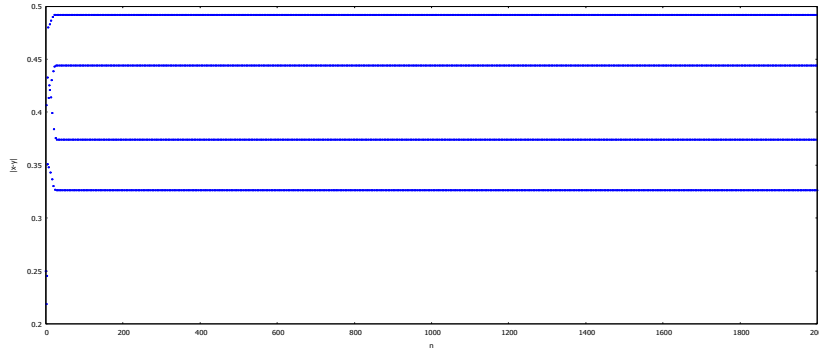


Figura 1.6: Serie temporal de la diferencia entre órbitas para el valor $a = 3,5$.

A modo de ejemplo, para una función simple como la logística con parámetro $a = 3,5$, la figura 1.6 muestra como el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f^n(x_0) - f^n(y_0)|$$

es nulo cuando las dos órbitas convergen de forma sincrona a un mismo punto periódico, o nunca es cero.

Obviamente, es preciso encontrar algún criterio objetivo y fácil de aplicar que nos indique si un comportamiento es complicado o no. Está claro que si queremos analizar la complejidad de la función logística para, por ejemplo, 10000 valores del parámetro, ir dibujando gráficas de series temporales no es operativo. Además, existen infinitas condiciones iniciales que testar. Veremos en la próxima sección como la entropía topológica, o simplemente entropía, proporciona un método operativo que es de utilidad en algunos casos particulares.

1.2.4. Caracterización de la complejidad topológica: entropía

A partir de ahora vamos a considerar funciones reales monótonas a trozos, es decir, funciones continuas $f : [\alpha, \beta] \rightarrow [\alpha, \beta]$ para las que existe una cantidad finita de puntos $x_0 = \alpha < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = \beta$ de forma que $f|_{(x_i, x_{i+1})}$ es creciente o decreciente para $i = 0, 1, \dots, n-1$. Diremos que f es estrictamente monótona a trozos si $f|_{(x_i, x_{i+1})}$ es estrictamente creciente

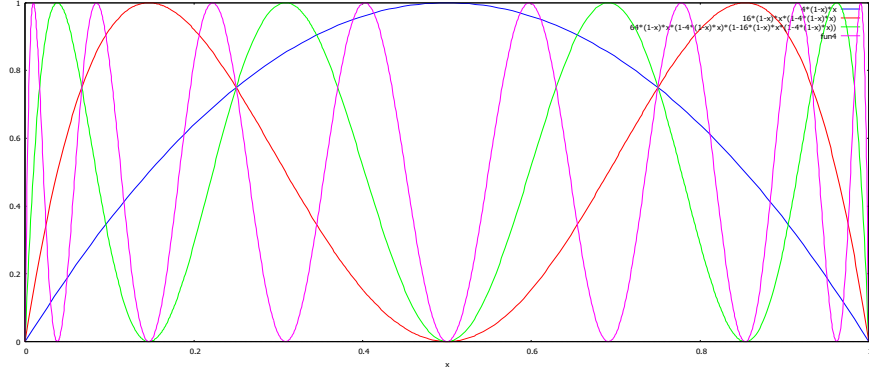


Figura 1.7: Gráficas de f , f^2 , f^3 y f^4 .

o decreciente para $i = 0, 1, \dots, n - 1$. Las familias de funciones que tomado en estos apuntes son estrictamente monótonas a trozos.

Es fácil darse cuenta de que si f es monótona a trozos, entonces sus iteraciones f^n también son monótonas a trozos. Denotaremos por $c(f^n)$ el número de trozos monótonos de la función f^n . La entropía (topológica) de f es

$$h(f) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log c(f^n).$$

Esta fórmula es fácil de aplicar en algunos casos concretos. Por ejemplo, si $f(x) = x$, es fácil darse cuenta de que $c(f^n) = c(f) = 1$, y por lo tanto

$$h(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log c(f^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log 1 = 0.$$

Otro ejemplo es la función $f(x) = 4x(1 - x)$, es decir la función logística con parámetro $a = 4$. La gráfica de diferentes iteraciones de f puede verse en la figura 1.7.

Como puede verse $c(f^n) = 2^n$, y por lo tanto

$$h(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log c(f^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log 2^n = \log 2.$$

Sin embargo, para otros valores del parámetro a no es sencillo en absoluto obtener los valores de la entropía para la familia logística. Posteriormente veremos un algoritmo que permitirá hacer este cálculo con precisión arbitraria. Por ahora, vamos a centrarnos en porqué la entropía caracteriza el comportamiento caótico.

Entropía y caos.

El criterio para distinguir entre comportamiento caótico y no caótico viene dado por la entropía: si $h(f) > 0$ diremos que el comportamiento es caótico, y si es nula no lo es. Esto viene motivado por el siguiente resultado que liga el caos Li-Yorke con la entropía.

Teorema 4 *Sea $f : I \rightarrow I$ una función continua monótona a trozos. Entonces se verifica:*

- (a) *Si $h(f) > 0$, entonces f es caótica.*
- (b) *$h(f) > 0$ si y sólo si f tiene un punto periódico que no es una potencia de dos.*

Como vemos, en virtud del Teorema de Sharkovsky, una función con entropía positiva tiene infinitos puntos periódicos al tener puntos periódicos con periodos 2^n , $n \in \mathbb{N}$. Es conocido, aunque difícil de probar, que si una función tiene una cantidad finita de periodos no es caótica. Existen funciones que tienen periodos únicamente de la forma 2^n , y por tanto tienen entropía nula, pero pueden tener ω -límites del tipo T^2 . Este tipo de funciones pueden ser caóticas y tener entropía nula, pero veremos posteriormente que esto no puede ocurrir si la función es tres veces continuamente derivable.

Finalmente, conviene mencionar que la entropía se puede definir para funciones continuas, sin necesidad de ser monótonas a trozos, y el Teorema anterior sigue siendo válido. Sin embargo, dicha definición de entropía es un tanto abstracta y tiene difícil aplicación práctica.

Cálculo de la entropía para funciones unimodales.

Una función $f : I \rightarrow I$ es unimodal si es estrictamente monótona a trozos tal que $c(f) = 2$. Por lo tanto, tienen un único extremo que puede ser máximo o mínimo. Si tenemos la ecuación en diferencias

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

con f unimodal con un mínimo, el cambio de variable $y = 1 - x$ la transforma en

$$y_{n+1} = 1 - f(1 - y_n),$$

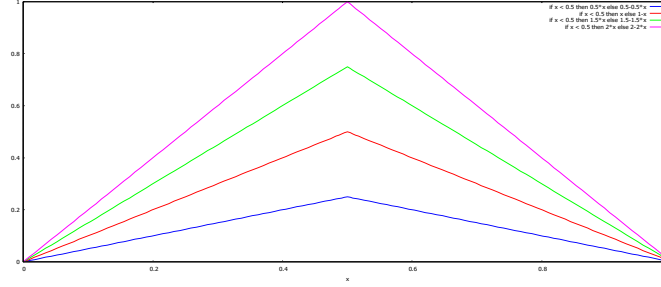


Figura 1.8: Gráficas de T_a para a igual a 0.5, 1, 1.5 y 2.

que será unimodal con un máximo. Así, podemos restringirnos al caso en que la función unimodal tiene máximo, que es el caso de la función logística.

El algoritmo que vamos a explicar precisa de dos ingredientes: unas nociones básicas de dinámica simbólica y la fórmula de la entropía para funciones lineales a trozos.

En primer lugar, una función, no necesariamente unimodal, es lineal a trozos si es estrictamente continua a trozos y sus trozos son lineales. Por ejemplo, la familia de funciones

$$T_a(x) = \begin{cases} ax & \text{si } x \in [0, 1/2], \\ -ax + a & \text{si } x \in [1/2, 1], \end{cases}$$

es unimodal, con máximo, y lineal a trozos. La figura 1.8 muestra la gráfica de T_a para distintos valores del parámetro.

La entropía de las funciones lineales a trozos con la propiedad de que el valor absoluto de las pendientes en cada trozo es constante e igual a m es conocida e igual a $\max\{0, \log m\}$. En particular, para la función T_a tenemos que

$$h(T_a) = \max\{0, \log a\}, \quad a \in (0, 2].$$

Para $a \in [1, 2]$ tenemos que

$$h(T_a) = \log a,$$

fórmula que utilizaremos a continuación.

La dinámica simbólica viene dada por la sucesión kneading. Para fijar ideas, sea $f : [\alpha, \beta] \rightarrow [\alpha, \beta]$ unimodal con máximo x_M , y sea x_0 una condición inicial. La sucesión kneading de longitud n de x_0 es

$$k_n(x_0, f) = (k_1, k_2, \dots, k_n)$$

donde

$$k_n := \begin{cases} 0 & \text{si } f^n(x_0) = \alpha, \\ 1 & \text{si } f^n(x_0) \in (\alpha, x_M), \\ 2 & \text{si } f^n(x_0) = x_M, \\ 3 & \text{si } f^n(x_0) \in (x_M, \beta), \\ 4 & \text{si } f^n(x_0) = \beta. \end{cases}$$

De igual forma, podemos construir una sucesión kneading de infinitos términos denotada $k(x_0, f) = (k_1, k_2, \dots)$. Por ejemplo, para $f(x) = 3,8x(1-x)$ se tiene que si $n = 5$, las sucesiones kneading son

$$\begin{aligned} k_5(0,5, f) &= (3, 1, 3, 3, 1), \\ k_5(0,25, f) &= (3, 3, 3, 3, 1), \\ k_5(0, f) &= (0, 0, 0, 0, 0). \end{aligned}$$

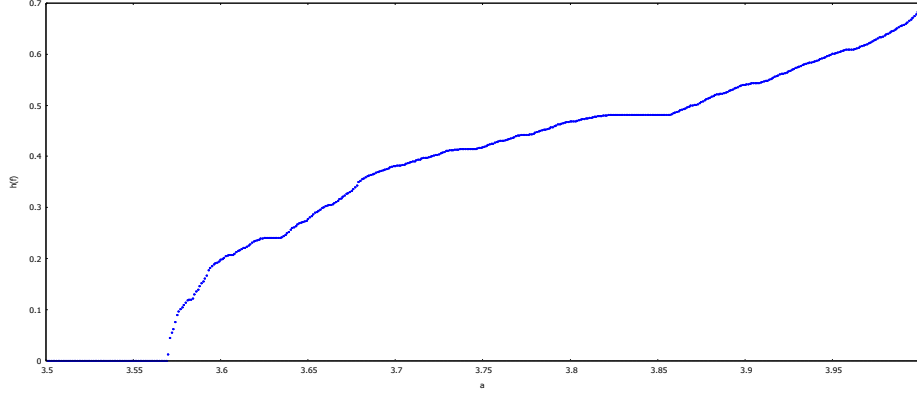
Se llama sucesión kneading de f a la sucesión kneading del máximo de la función, esto es, $k_n(f) := k_n(x_M, f)$, y $k(f) := k(x_M, f)$. En el caso de la función $f(x) = 3,8x(1-x)$ se tiene que $k_5(f) = (3, 1, 3, 3, 1)$, ya que $x_M = 1/2$.

Dadas dos funciones unimodales (con máximo) f y g , si sus sucesiones kneading son distintas, se comparan según la siguiente regla:

1. Definimos n_0 tal que $k_{n_0}(f) \neq k_{n_0}(g)$, pero $k_n(f) = k_n(g)$ para $n < n_0$.
2. Si $n_0 = 1$, decimos que $k(f) > k(g)$ si $k_1^f > k_1^g$, donde k_1^f y k_1^g son los primeros elementos de $k(f)$ y $k(g)$.
3. Si $n_0 > 1$, definimos \mathcal{K} como el número de veces que 3 aparece en $k_{n_0-1}(f) = k_{n_0-1}(g)$.
4. Decimos que $k(f) > k(g)$ cuando o bien \mathcal{K} es par y $k_{n_0}^f > k_{n_0}^g$, o bien \mathcal{K} es impar y $k_{n_0}^f < k_{n_0}^g$, donde $k_{n_0}^f$ y $k_{n_0}^g$ denotan los elementos n_0 de $k(f)$ y $k(g)$.

Con este orden, tenemos el siguiente resultado que liga las entropías de dos funciones unimodales con máximo.

Teorema 5 Sean f y g dos funciones unimodales con máximo tales que $k(f) > k(g)$. Entonces $h(f) \geq h(g)$.



El Teorema anterior permite construir un algoritmo para calcular la entropía de una función unimodal con máximo f . Dicho algoritmo recuerda al Teorema de Bolzano, y sigue los siguientes pasos:

1. Fijar $N \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$.
2. Calcular $k_N(f)$.
3. Fijar $A = 1$, $B = 2$.
4. Definir $s = \frac{A+B}{2}$ y tomar la función T_s .
5. Calcular $k_N(T_s)$.
6. Si $k_N(f) > k_N(T_s)$ hacer $A = s$. Si no, $B = s$.
7. Si $B - A < \varepsilon$, $h(f) = \log \frac{A+B}{2}$, si no repetir desde 4.

Al terminar el algoritmo, habremos obtenido la entropía de f con un error menor que ε . La figura 1.2.4 muestra el cálculo de la entropía de la función logística con error 0.001.

El algoritmo puede fallar si $k_N(f) = k_N(T_a)$ para algún a . Entonces no es posible comparar las dos sucesiones kneading y en principio no se debería llegar a ningún resultado. Esto puede solucionarse aumentando N , pero en ocasiones, lo que realmente ocurre es que $k(f) = k(T_a)$ y no podríamos llegar

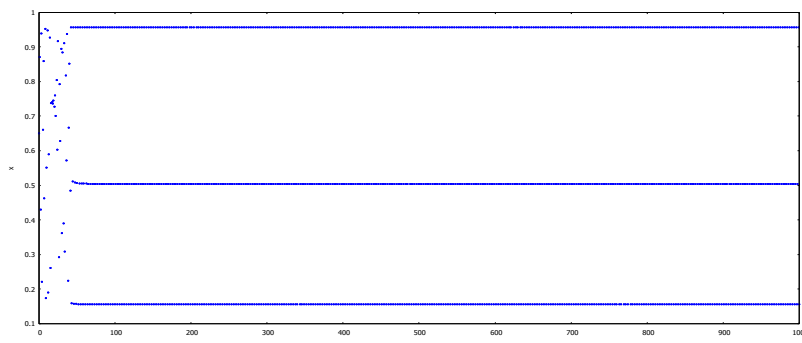


Figura 1.9: Serie temporal de una órbita de $f(x) = 3.83x(1-x)$.

a resultado alguno. Esto es lo que pasa cuando la función es $f(x) = 4x(1-x)$, con sucesión kneading

$$k(f) = (4, 0, 0, \dots) = k(T_2).$$

En este caso ocurre que $h(f) = h(T_2) = \log 2$. Modificar ligeramente los valores de A y B , por ejemplo tomando $B = 2 - \delta$, con $0 < \delta < \varepsilon$, suele ser suficiente para que el algoritmo proporcione un valor.

1.2.5. Observación de la complejidad: exponentes de Lyapunov.

Una de las cuestiones filosóficas más conocidas es aquella que establece que, si produce ruido un árbol que cae en un bosque y no hay nadie para oírlo. Sin querer ahondar sobre este tema, la dinámica caótica nos presenta una paradoja similar pues existen funciones con entropía positiva, y por tanto caóticas, de forma que cada vez que calculamos al azar una órbita vemos que converge a un punto periódico.

Por ejemplo, tomamos $f(x) = 3.83x(1-x)$, que como vemos en la gráfica 1.2.4, tiene entropía positiva. Sin embargo, tomando al azar una condición inicial entre 0 y 1 vemos que la órbita converge a un punto periódico, como se muestra en la figura 1.9.

No importa cuántas veces se repita el experimento, siempre observaremos este comportamiento salvo la pura casualidad, o eligiendo adrede una condición inicial apropiada, por ejemplo $x_0 = 1$, que da la órbita $(1, 0, 0, \dots)$.

Ahora bien, la función es caótica. No sólo porque tenga entropía positiva. Además tiene un punto periódico de periodo tres que es precisamente al que convergen las órbitas elegidas al azar. Sólo cabe inferir que no todo el caos puede observarse, y lo que vamos a analizar aquí es cuando esa observación es posible.

El punto de partida es la definición de atractor métrico. Consideramos la distribución uniforme en el intervalo $[\alpha, \beta]$ en el cual la función f está definida. Un conjunto $A \subset [\alpha, \beta]$ se dice atractor métrico si existe una probabilidad positiva, con la distribución uniforme, de que dada una condición inicial x_0 , su conjunto ω -límite $\omega(x_0, f) \subset A$ y no existe ningún subconjunto $A' \subsetneq A$ con esta propiedad. Obviamente, el punto periódico de periodo tres al que convergen las órbitas de $f(x) = 3,83x(1-x)$ es un atractor métrico de la función. De hecho, es el único que tiene, por lo que la convergencia se da con probabilidad 1. Vamos a ver cómo podemos llegar a esta conclusión.

En primer lugar, a partir de ahora supondremos que todas las funciones son de clase C^3 , es decir, tienen derivadas de tercer orden continuas. Para estas funciones, se define su derivada Schwarziana como

$$S(f) := \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2,$$

siempre que $f'(x) \neq 0$. La función logística tiene derivada Schwarziana

$$\begin{aligned} S(f) &= \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2 \\ &= -\frac{3}{2} \left(\frac{-2a}{a(1-2x)} \right)^2 = -\frac{6}{(1-2x)^2} < 0, \end{aligned}$$

si $x \neq 1/2$. Las funciones unimodales con derivada Schwarziana negativa satisfacen el siguiente resultado, que caracteriza sus atractores métricos.

Teorema 6 *Sea $f : [\alpha, \beta] \rightarrow [\alpha, \beta]$ unimodal con derivada Schwarziana negativa. Entonces f tiene a lo sumo dos atractores métricos. Además:*

- (a) *Si tiene dos atractores métricos, uno de ellos es α , que debe ser punto fijo de f .*
- (b) *Los atractores son de la forma $T1$, $T2$ o $T3$, y si son de la forma $T2$ o $T3$, debe contener el ω -límite del máximo de f .*

Una consecuencia de este resultado es que, si $|f'(\alpha)| > 1$, entonces f tiene un único atractor. Los atractores son de la misma forma para funciones unimodales sin derivada Schwarziana negativa, pero en ese caso no es posible determinar cuántos atractores tiene la función. El problema nuevamente se reduce a buscar un criterio efectivo para determinar cómo son los atractores de f y si dichos atractores dan lugar a dinámica compleja que se pueda observar. La solución en este caso la proporcionan los llamados exponentes de Lyapunov, que describimos a continuación.

Dada una órbita con condición inicial x_0 y $n \in \mathbb{N}$, calculamos

$$|(f^n)'(x_0)| = \left| \prod_{i=0}^n f'(f^i(x_0)) \right| = \prod_{i=0}^n |f'(f^i(x_0))|.$$

Si x_0 es periódico, o su órbita converge a un atractor periódico, tendríamos que si n es suficientemente grande,

$$\prod_{i=0}^n |f'(f^i(x_0))| \leq 1,$$

o equivalentemente

$$\frac{1}{n} \log \left(\prod_{i=0}^n |f'(f^i(x_0))| \right) < 0.$$

Desarrollando esta expresión

$$\frac{1}{n} \log \left(\prod_{i=0}^n |f'(f^i(x_0))| \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \log |f'(f^i(x_0))| < 0.$$

Se define el exponente de Lyapunov en x_0 como

$$Exp(x_0, f) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \log |f'(f^i(x_0))|,$$

donde el límite superior de una sucesión es el mayor de los límites de todas sus subsucesiones, y se usa cuando no tiene porqué existir el límite (por ejemplo la sucesión $(-1)^n$ tiene por límite superior 1).

Si la función es unimodal, para determinar si el caos es observable basta entonces calcular $Exp(x_M, f)$, es decir, el exponente de Lyapunov en el máximo. Si este es negativo, tendremos convergencia a un punto periódico, y si

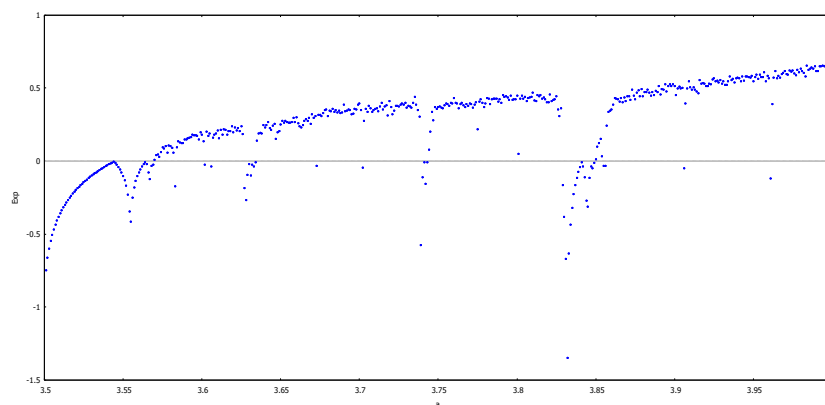


Figura 1.10: Exponente de Lyapunov de la función logística para $a \in [3,5, 4]$.

es positivo es más que probable que la entropía sea positiva y tengamos un comportamiento caótico. La figura 1.10 muestra el exponente de Lyapunov en $1/2$ de la función logística. Como vemos, en $a = 3,83$ éste es negativo al tener como atractor una órbita periódica.

Como vemos, el caos observable si el exponente de Lyapunov es positivo.

1.3. Bibliografía

Obviamente, los contenidos de estas notas no son invención mía sino que se basan en numerosas publicaciones científicas. A continuación se resumen los libros más notables y aquellos artículos de investigación cuyos contenidos son necesarios y nunca han sido trasladados a un libro como tales. Esta lista de referencias no debe considerarse como de obligada lectura.

1. F. Balibrea, V. Jiménez López, The measure of scrambled sets: a survey, Acta Univ. M. Belii Ser. Math. 7 (1999), 3–11.
2. L. Block, J. Keesling, S. H. Li and K. Peterson, An improved algorithm for computing topological entropy, J. Stat. Phys. 55 (1989), 929–939.
3. W. de Melo and S. van Strien, One dimensional dynamics, (1993) Springer Verlag.

4. T. Y. Li and J. A. Yorke, Period three implies chaos, *Amer. Math. Monthly*, 82 (1975) 985-992.
5. J. Milnor, On the concept of attractor. *Comm. Math. Phys.* 99 (1985), 177-195.
6. M. Misiurewicz and W. Szlenk, Entropy of piecewise monotone mappings, *Studia Math.* 67 (1980) 45-63.
7. V.I. Oseledets, A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems, *Trans. Moscow Math. Soc.* 19 (1968), 197-231. *Moscov.Mat.Obsch.*19 (1968), 179-210.
8. D. Singer, Stable orbits and bifurcations of maps on the interval, *SIAM J. Appl. Math.* 35 (1978), 260-267.
9. J. Smítal, Chaotic functions with zero topological entropy, *Trans. Amer. Math. Soc.* 297 (1986), 269-282.
10. P. Walters, *An introduction to ergodic theory*, Springer Verlag, New York (1982).