Trabajo de prácticas. Métodos numéricos 2011–12.

El trabajo de prácticas consiste en programar un método de predictor corrector para integrar numéricamente el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x' = a_1(y - x), \\ y' = b_1 x - xz, \\ z' = -c_1 z + d_1 x^2 \\ x(0) = z(0) = 1, \ y(0) = 0, \end{cases}$$

donde $a_1 = 10$, $b_1 = 40$, $c_1 = 2.4$, y $d_1 = 1$.

Para deducir los métodos, se obtendrán los números a y b de la manera siguiente. En primer lugar se tomará la fecha de nacimiento, por ejemplo 11-09-2001 y se sumarán los dígitos. En el caso del ejemplo la suma daría 14. El valor de a se obtendrá dividiendo el número obtenido por 100, es decir $a = 0.14$ en nuestro ejemplo.

Para obtener b. tomamos los números del DNI o NIE y los sumamos de manera análoga a la anterior. Si el DNI fuera 12345678, la suma de los dígitos daría 36. El valor de b será x_{36} (tomando sólo tres cifras decimales) donde x_n es la sucesión dada por la recurrencia

$$\begin{cases} x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n), \\ x_0 = 0.45. \end{cases}$$

En el caso del ejemplo $b = 0.902$.

Una vez obtenidos a y b ya estamos en condiciones de generar los métodos numéricos para integrar el anterior problema de condiciones iniciales.

1 Runge Kutta

Si $a > b$, el método tendrá por tablero de Butcher

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ b & a_{21} & & \\ a & a_{31} & a_{32} & \\ \hline & b_1 & b_2 & b_3 \\ & & & \end{array}$$

mientras que si $b > a$ el tablero será

$$\begin{array}{c|ccc}
0 & & & \\
a & a_{21} & & \\
b & a_{31} & a_{32} & \\
\hline
 & b_1 & b_2 & b_3 \\
 & & &
\end{array}$$

Se trendrá que deducir los restantes valores del tablero para que el método resultante sea de orden $O(h^3)$ e integrar el sistema de ecuaciones diferenciales realizando representaciones gráficas (de x frente a y, y frente a z y x frente a z) de las soluciones del problema de condiciones iniciales para el tiempo final $t_f = 100$.

2 Método de predictor corrector

El esquema predictor corrector estará formado por dos métodos multipaso lineales de la forma

$$\mathbf{y}_{i+1} = a_0\mathbf{y}_i + a_1\mathbf{y}_{i-1} + h\left(b_0\mathbf{f}_i + b_1\mathbf{f}_{i-1} + b_2\mathbf{f}_{i-2}\right),$$

y

$$\mathbf{y}_{i+1} = a_0\mathbf{y}_i + a_1\mathbf{y}_{i-1} + h\left(b_{-1}\mathbf{f}_{i+1} + b_0\mathbf{f}_i + b_1\mathbf{f}_{i-1} + b_2\mathbf{f}_{i-2}\right),$$

donde $\mathbf{f}_i = \mathbf{f}(t_i, \mathbf{y}_i)$. En el caso del método explícito, debe calcularse el método suponiendo que $a_0 = 1 + b$, siendo b el obtenido anteriormente. El método obtenido tendrá orden de convergencia local $O(h^4)$ y se deberá comprobar si dicho método es estable o no. Para obtener el método implícito, debe obtenerse suponiendo que $a_0 = a$ y $b_{-1} = b$, de tal manera que dicho método sea estable y convergente de orden global $O(h^3)$. Para inicializar el esquema de predictor corrector deberá emplearse el método Runge–Kutta obtenido anteriormente. Habrá que obtener las respresentaciones gráficas para el tiempo final anterior.

3 Presentación del trabajo

El trabajo consistirá en una memoria que contenga:

1. La obtención de los coeficientes de los métodos numéricos anteriores.

2. El listado de los distintos programas en Mathematica que se hayan realizado.