MÉTODOS NUMÉRICOS. Curso 2009/10.

Hoja 2: Métodos de un paso.

1. Calcula una constante de Lipschitz respecto de y para las funciones

   (a) $f(t,y) = 2y/t$, $t \geq 1$.

   (b) $f(t,y) = t - y^2$, $|y| \leq 10$

   (c) * $f(t,y) = 2y/(t^2+1)$.

2. Resuelve los siguientes problemas mediante el método de Euler con amplitudes de paso h y $h/2$. Calcula las estimaciones de error de ambas aproximaciones en el tiempo $t_N = b$ y aplica extrapolación de Richardson.

   (a) $\{y' = 1 - y,\ y(0) = 0\}$, $b = 1$, $h = 0.5$, $h/2 = 0.25$.

   (b) $\{y' = t^2 - y,\ y(0) = 2\}$, $b = 0.2$, $h = 0.2$, $h/2 = 0.1$.

   (c) $\{y' = y + e^t + ty,\ y(1) = 2\}$, $b = 1.03$, $h = 0.01$, $h/2 = 0.005$.

   (d) $\{y' = 2y/(t^2+1),\ y(0) = 1\}$, $b = 1.2$, $h = 0.2$, $h/2 = 0.1$.

   (e) $\{y' = y^2 + 2t - t^4,\ y(0) = 0\}$, $b = 0.2$, $h = 0.2$, $h/2 = 0.1$.

   (f) $\{y' = t + y,\ y(0) = 1\}$, $b = 0.2$, $h = 0.2$, $h/2 = 0.1$.

3. Aplica el método de Euler para resolver el problema $y' = 1 - 2ty$, $y(0) = 0$, dando tres pasos de amplitud $h = 0.1$ para aproximar $y(0.3)$.

4. * Aplica el método de Euler para resolver el problema $y'' + 2y' + 4y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$, dando dos pasos de amplitud $h = 0.2$ para aproximar $y(0.4)$.

5. Se considera la ecuación integral de Volterra

$$y(t) = e^t + \int_0^t \cos(s + y(s))\, ds$$

   Transforma la ecuación integral en una EDO, obtén la condición inicial $y(0)$ y aplica el método de Euler con $h = 0.5$ para aproximar $y(1)$.

6. Se considera el método $y_n = y_{n-1} + h \cdot f(t_n, y_{n-1})$.

   (a) Encuentra la función $\phi(t,y,h)$ que se ajusta a $y_n = y_{n-1} + h \cdot \phi(t_{n-1}, y_{n-1}, h)$.

   (b) Demuestra que el método numérico es estable y consistente de primer orden.

   (c) Aplica extrapolación de Richardson local para construir un nuevo método convergente de segundo orden.

7. Demuestra que el esquema de un paso $y_n = y_{n-1} + h\phi(t_{n-1}, y_{n-1}, h)$ definido a partir de

$$\phi(t,y,h) = f(t,y) + \frac{h}{2} f^{(1)}\left(t + \frac{h}{3}, y + \frac{h}{3} f(t,y)\right)$$

   es convergente de tercer orden.

8. Encuentra coeficientes $a_{2\,1}, a_{3\,1}, a_{3\,2}$ para una fórmula explícita similar a la regla de Simpson

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1/2 & a_{2\,1} & & \\ 1 & a_{3\,1} & a_{3\,2} & \\ \hline & 1/6 & 4/6 & 1/6 \end{array}$$

de tercer orden. ¿Es esta regla de orden cuatro?

9. Encuentra qué relación han de cumplir los coeficientes b_1, b_2 y b_3 para que el método de tablero

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1/2 & 1/2 & & \\ 1 & 1/2 & 1/2 & \\ \hline & b_1 & b_2 & b_3 \end{array}$$

tenga orden dos. ¿Existe algún caso con orden tres?

10. Resuelve el sistema de dos ecuaciones

$$\begin{aligned} y_1' &= t \cdot y_1 \cdot y_2 \\ y_2' &= 3y_1 + 2y_2 \end{aligned}$$

con las condiciones iniciales $y_1(3) = -1.312258$, $y_2(3) = -0.414524$ dando un paso con $h = 0.04$ y dos pasos con $h = 0.02$ con la regla de los trapecios explícita, el método de Taylor de tercer orden y el método Runge-Kutta clásico de cuarto orden. Utiliza la extrapolación de Richardson para mejorar las aproximaciones de los tres métodos.

11. Se considera el esquema

$$\begin{aligned} y_n \;&=\; y_{n-1} + \frac{3}{4}\,h\,f\left(t_{n-1} + \frac{h}{3}, y_{n-1} + h\,f(t_{n-1}, y_{n-1})\right) + \\ &\quad + \frac{1}{4}\,h\,f(t_{n-1} + h, y_{n-1} + hf(t_{n-1}, y_{n-1})) \end{aligned}$$

Plantea el método como un método Runge-Kutta y escribe su tablero de Butcher. ¿Satisface las condiciones de simplificación?

12. * Se considera el esquema anterior

$$\begin{aligned} y_n \;&=\; y_{n-1} + \frac{3}{4}\,h\,f\left(t_{n-1} + \frac{h}{3}, y_{n-1} + h\,f(t_{n-1}, y_{n-1})\right) + \\ &\quad + \frac{1}{4}\,h\,f(t_{n-1} + h, y_{n-1} + hf(t_{n-1}, y_{n-1})) \end{aligned}$$

siendo f lipschitziana y suficientemente diferenciable. Demuestra que, para h suficientemente pequeña, este esquema admite una solución única, estudia la estabilidad y el orden del esquema.

13. * Obtén todos los métodos Runge-Kutta explícitos de dos etapas y orden dos. ¿Puede alguno de ellos tener orden superior a dos?

14. * Usa el método de Taylor de tercer orden y el Runge-Kutta clásico de cuarto orden con $h = 0.1$ para aproximar la solución en $t = 0.1$ y $t = 0.2$ del problema $y' = y - t$, $y(0) = 2$. Utiliza la solución exacta $y(t) = e^t + t + 1$ para comparar ambas aproximaciones.

15. * Se considera el método

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1/2 & 1/2 & & \\ 3/4 & 0 & 3/4 & \\ \hline & 2/9 & 3/9 & 4/9 \end{array}$$

Escribe el algoritmo y estudia el orden del método. Utilízalo para resolver el problema $y' = y^2 + 2t - t^4$, $y(0) = 0$ dando dos pasos con $h = 0.1$.

16. * Se considera el método Runge-Kutta de cuarto orden con tablero

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ 1/2 & 1/2 & & & \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 & & \\ 1 & 0 & -1 & 2 & \\ \hline & 1/6 & 0 & 4/6 & 1/6 \end{array}$$

Escribe el algoritmo y justifica su convergencia. Resuelve el problema $y' = 1 - 2ty$, $y(0) = 0$ en el intervalo $[0, 0.3]$ tomando $h = 0.1$ y utilizando los métodos de Euler, Taylor de segundo orden y este Runge-Kutta.

17. * Dada la ecuación lineal

$$y' = P_1(t) \cdot y + Q_1(t)$$

prueba que las derivadas necesarias para el método de Taylor de orden p vienen dadas por el algoritmo

$$y^{(k)} = P_k(t) \cdot y + Q_k(t)$$

donde

$$P_k(t) = P'_{k-1}(t) + P_1(t) \cdot P_{k-1}(t) \qquad Q_k(t) = Q'_{k-1}(t) + Q_1(t) \cdot P_{k-1}(t)$$

18. * Se considera el método

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1/2 & 1/2 & & \\ 3/4 & 0 & 3/4 & \\ \hline & 2/9 & 3/9 & 4/9 \end{array}$$

Escribe el algoritmo y estudia el orden. Integra el problema $y' = t^2 + y$, $y(0) = 0$ en $[0, 0.2]$ tomando $h = 0.1$ con este método y el de Taylor de tercer orden.

19. * Estudia en función de c_3 y b_2 el orden del método de tablero

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1/3 & 1/3 & & \\ c_3 & 0 & c_3 & \\ \hline & 1/4 & b_2 & 3/4 \end{array}$$

y obtén uno con orden 3. Resuelve con este método y el de Taylor de segundo orden el problema $y' = t^2 - y$, $y(0) = 1$ en $[0, 0.2]$ con pasos $h = 0.2$ y $h = 0.1$. Utiliza la solución exacta $y(t) = -e^{-t} + t^2 - 2t + 2$ para calcular los errores en $t = 0.2$ para ambos métodos. ¿Se comportan los errores como se espera cuando h se divide entre dos?

20. * Halla todos los métodos de orden máximo de tablero

$$
\begin{array}{c|ccc}
0 & & & \\
c_2 & c_2 & & \\
c_3 & a_{31} & a_{32} & \\
\hline
 & 1/6 & 4/6 & 1/6
\end{array}
$$

Utiliza uno de ellos y el de Taylor de tercer orden para aproximar la solución de $y' = t \cdot y$, $y(0) = 1$ en $t = 0.2$ dando un paso de amplitud $h = 0.2$ y dos de amplitud $h = 0.1$ y mejorar las aproximaciones mediante extrapolación de Richardson. Teniendo en cuenta que la solución exacta es $y(t) = e^{t^2/2}$, ¿se comportan los errores como se espera?

21. * Se considera el método de tablero

$$
\begin{array}{c|cc}
0 & & \\
2/3 & 2/3 & \\
\hline
 & 1/4 & 3/4
\end{array}
$$

(a) Estudia el orden del método.

(b) Hemos integrado con este método el problema $y' = e^t$, $y(0) = 1$ en el intervalo $[0, 1]$ y hemos obtenido la siguiente tabla de errores.

h	error
$1/4$	$1.23047 \cdot 10^{-4}$
$1/40$	$1.24191 \cdot 10^{-7}$
$1/400$	$1.24266 \cdot 10^{-10}$

¿Se ajusta el error numérico al teórico? Razona tu respuesta calculando el error local asociado al problema.

22. * Transforma el problema $y''(t) = t + y^2(t)$, $y(3) = 1$, $y'(3) = -2$, en un sistema de primer orden y aproxima la solución en el tiempo $t = 3.02$ tomando $h = 0.01$ para la regla de los trapecios explícita cuyo tablero es

$$
\begin{array}{c|cc}
0 & & \\
1 & 1 & \\
\hline
 & 1/2 & 1/2
\end{array}
$$

23. * Se quiere aproximar la solución en $t = 0.2$ de la ecuación $y'(t) = t + e^{y(t)}$ con la condición inicial $y(0) = 0$. Da dos pasos con $h = 0.1$ con el método de Taylor de orden 3 para aproximar $y(0.1)$ e $y(0.2)$.

24. * Estudia si hay un Runge-Kutta explícito de tres etapas y orden tres con $b_1 = b_2 = b_3$.

25. * Transforma el problema $y''(t) = y(t) + t \cdot y'(t)$, $y(1) = 2$, $y'(1) = -3$, en un sistema de primer orden y aproxima la solución en el tiempo $t = 1.04$ tomando $h = 0.02$ para el método Runge-Kutta de tablero

$$
\begin{array}{c|cc}
0 & & \\
2/3 & 2/3 & \\
\hline
 & 1/4 & 3/4
\end{array}
$$

26. * Dada la ecuación $y'(t) = t \cdot y^2(t)$, $y(1) = 2$ aproxima $y(1.1)$ de tres formas: dando un paso con $h = 0.1$ para el método de Taylor de orden dos, dos pasos con $h = 0.05$ para el mismo método y aplicando la extrapolación de Richardson a partir de los datos anteriores.

27. * Estudia si hay algún Runge-Kutta explícito de tres etapas y orden tres con $c_2 = c_3$. En caso afirmativo escribe el tablero de Butcher de todos ellos.

28. * Se quiere aproximar la solución en el tiempo $t = 1.02$ del sistema

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t)^2 \cdot z(t), \qquad & x(1) &= 1 \\ z'(t) &= e^t + x(t), \qquad & z(1) &= -2 \end{aligned}$$

Da dos pasos con $h = 0.01$ para el método Runge-Kutta de tablero

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1/2 & 1/2 & & \\ 1 & -1 & 2 & \\ \hline & 1/6 & 4/6 & 1/6 \end{array}$$

29. * Se quiere resolver el problema de primer orden $y'(t) = t + y(t)^2$, $\quad y(2) = -1$. Aproxima $y(2.01)$ e $y(2.02)$ con el método de Taylor de tercer orden y $h = 0.01$.

30. * Encuentra el Runge-Kutta explícito de tres etapas y orden tres con $b_1 = c_3 = 0$.

31. * Se quiere aproximar en el tiempo $t = -0.98$ la solución del sistema

$$\begin{aligned} x'(t) &= t \cdot z(t), \qquad & x(-1) &= 1 \\ z'(t) &= x(t) + z(t), \qquad & z(-1) &= -2 \end{aligned}$$

Da dos pasos con $h = 0.01$ para el método Runge-Kutta de tablero

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1/3 & 1/3 & & \\ 2/3 & 0 & 2/3 & \\ \hline & 1/4 & 0 & 3/4 \end{array}$$

32. * Dado el problema

$$y'(t) = \operatorname{sen}(t + y(t)), \quad y(0) = 1,$$

aproxima $y(0.1)$ de tres formas distintas: dando un paso con $h = 0.1$ para el método de Taylor de orden dos, dos pasos con $h = 0.05$ para el mismo método y aplicando la extrapolación de Richardson a partir de los datos anteriores.

33. * Estudia si existe algún Runge-Kutta de dos etapas y orden dos con $b_1 = 0$. Estudia si existe algún Runge-Kutta de tres etapas y orden tres con $b_1 = b_2 = 0$.

Ejercicios propuestos, Métodos Runge-Kutta

- Para resolver el sistema de dos ecuaciones

$$y_1' = t \cdot y_1 \cdot y_2$$
$$y_2' = 3y_1 + 2y_2$$

con las condiciones iniciales $y_1(3) = -1.312258$, $y_2(3) = -0.414524$ se va a utilizar un método Runge-Kutta de tablero

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1/3 & 1/3 & & \\ 2/3 & 0 & 2/3 & \\ \hline & b_1 & b_2 & b_3 \end{array}$$

- Encuentra qué relación han de cumplir b_1, b_2 y b_3 para que el orden del método sea dos.
- Encuentra una elección de los coeficientes con orden tres.
- Aproxima $y(3.04)$ dando un paso con $h = 0.04$ con el método de segundo orden que satisface $b_1 = 0$.
- Aproxima $y(3.04)$ dando un paso con $h = 0.04$ con el método de tercer orden.
- Utiliza las soluciones numéricas anteriores para calcular una estimación del error que comete el método de segundo orden en $t = 3.04$.
- Utiliza la estimación anterior para elegir una nueva amplitud de paso h para la que el error sea, aproximadamente, de 10^{-6} unidades.
- Utiliza la amplitud de paso anterior para aproximar $y(3.04 + h)$ con los dos métodos Runge-Kutta.
- Utiliza MATHEMATICA (u otro programa) para calcular de manera precisa una solución numérica $y(3.04+h)$ y estudia el comportamiento de los errores en ambos métodos Runge-Kutta.

Ejercicio propuesto, Extrapolación de Richardson

Se va a resolver mediante el método de Euler el sistema de dos ecuaciones

$$y_1' = t \cdot y_1 \cdot y_2$$
$$y_2' = 3y_1 + 2y_2$$

con las condiciones iniciales $y_1(3) = -1.312258$, $y_2(3) = -0.414524$.

- Aproxima $y(3.04)$ dando un paso con $h = 0.04$, dos pasos con $h = 0.02$ y cuatro pasos con $h = 0.01$.
- Calcula las estimaciones de los errores en los tres casos.
- Aplica la extrapolación de Richardson con $h = 0.04$ y $h = 0.02$ para mejorar la aproximación en $t = 3.04$.
- Aplica la extrapolación de Richardson con $h = 0.02$ y $h = 0.01$ para mejorar la aproximación en $t = 3.02$ y $t = 3.04$.
- Aplica la extrapolación de Richardson a las dos extrapolaciones anteriores para mejorar la aproximación en $t = 3.04$.

Nota: La solución del problema es $y_1(3.04) = -1.23367682738$, $y_2(3.04) = -0.60841763161$.