MÉTODOS NUMÉRICOS. Curso 2009/10.

Hoja 3: Métodos multipaso.

- **Nota:** En los siguientes ejercicios, denotaremos por $f_n = f(t_n, y_n)$.

1. Deducir el desarrollo de la serie de potencias centrado en 0 dado por
$$(1-x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\begin{array}{c} a \\ m \end{array} \right) x^n.$$
Utilizarlo para obtener los coeficientes de los métodos de Adams explícito e implícito para distintos pasos. Para ello darse cuenta que
$$\int_{\alpha}^{\beta} (1-x)^a da = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} (-1)^n \left(\begin{array}{c} a \\ m \end{array} \right) x^n da,$$
y elegir a, α y β apropiados.

2. Deduce las fórmula de Adams implícitas de órdenes uno, dos, tres y cuatro.

3. Reescribe la ecuación de segundo orden $y'' = t \cdot y \cdot y'$, $y(-2) = 1.23$, $y'(-2) = 4.56$ como un sistema de dos ecuaciones de primer orden. Considera $h = 0.05$ y utiliza el método de Adams explícito de dos pasos para aproximar la solución en $t = -1.8$, inicializando con un método de Runge–Kutta de orden dos.

4. * Se considera la ecuación de segundo orden $y'' = 2y' + 4y + t$. Reescribe la ecuación como un sistema de primer orden y aplica el método de Adams explícito de segundo orden con $h = 0.1$ y $0 \leq t \leq 0.3$, tomando las condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = 0$, y los datos en $t = 0.1$ que se obtienen con el método de Taylor de orden tres.

5. * Sea el esquema $y_n - (1+a)y_{n-1} + a\, y_{n-2} = \frac{h}{12}((5+a)f_n + 8(1-a)f_{n-1} - (1+5a)f_{n-2}$.
   (a) Estudia en función de a convergencia y orden del método.
   (b) Elige el método de mayor orden e integra con $h = 0.1$ el problema $y' = t - 5y$, $y(0) = 1$ en el intervalo $0 \leq t \leq 0.3$, inicializando con un método de un paso del mismo orden que el método multipaso.

6. * Estudia para qué valores de a es estable el esquema $y_n - (1+a)y_{n-1} + a\, y_{n-2} = h\, f_{n-1}$.

7. * Estudia en función de a y b el orden de convergencia de $y_n - y_{n-1} = h(a\, f_{n-1} + b\, f_{n-2})$.

8. * Aplica el método de Adams explícito de segundo orden al problema $y' = t + 2y$ con $h = 1/4$ para aproximar $y(1)$, partiendo de las condiciones exactas $y(0) = 0$, $y(1/4) = -3/8 + (1/4)\sqrt{e}$.

9. * Se considera el método multipaso $y_n = y_{n-4} + \frac{4h}{3}(2f_{n-1} - f_{n-2} + 2f_{n-3})$.
   (a) Estudia convergencia y orden del método.
   (b) Se considera la ecuación $y' = 4e^{0.8t} - y/2$. Utiliza este método con $h = 1$ para aproximar $y(4)$ partiendo de los datos $y(0) = 2$, $y(1) = 6.1946$, $y(2) = 14.8439$, $y(3) = 33.6771$.

10. * Considera la familia de métodos $y_n = y_{n-1} + h(\alpha f_n + (1-\alpha) f_{n-1})$.

    (a) Estudia la convergencia y el orden en función de α.

    (b) Para $\alpha = 1/2$ resuelve el problema $y' = -10y$, $y(0) = 1$ calculando y_n en términos de n y h.

    (c) Estima el error local tras dar un paso con dicho algoritmo.

11. * Construye los métodos multipaso $y_n + \alpha_1 y_{n-1} + \alpha_2 y_{n-2} = h(\beta_1 f_{n-1} + \beta_2 f_{n-2})$ consistentes de orden al menos dos y discute su estabilidad. Elige alguno convergente con $\alpha_1 = 0$ y resuelve el problema $y' = y^2 + 2t - t^4$, $y(0) = 0$ con $h = 0.1$ y $0 \leq t \leq 0.3$, inicializando con el método de Taylor de segundo orden.

12. * Estudia la convergencia de los métodos

    (a) $y_n - y_{n-2} = \dfrac{h}{3}(7\, f_{n-1} - 2\, f_{n-2} + f_{n-3})$

    (b) $y_n - y_{n-2} = \dfrac{h}{24}(9\, f_{n-1} + 19\, f_{n-2} + 5\, f_{n-3} + f_{n-4})$

13. * Dado el método lineal multipaso

$$y_n - (1+a) y_{n-1} + a y_{n-2} = \frac{1}{2}\, h\, ((3-a) f_{n-1} - (1+a) f_{n-2})$$

    (a) Estudia convergencia y orden para $a = 0$ y $a = 5$.

    (b) Si alguno de los métodos anteriores converge úsalo para integrar numéricamente la ecuación $y' = 4\, t\, y^{1/2}$, $y(0) = 1$ en el intervalo $0 \leq t \leq 0.6$ con $h = 0.2$ e inicializando con un método de Runge–Kutta orden 2.

14. * Se quiere aproximar la solución en $t = 0.4$ de la ecuación $y'(t) = t + e^{y(t)}$ con la condición inicial $y(0) = 0$.

    a) Da dos pasos con $h = 0.1$ con el método de Taylor de orden 3 para aproximar $y(0.1)$ e $y(0.2)$.

    b) A partir de los datos anteriores aproxima $y(0.3)$ e $y(0.4)$ con el método de Adams explícito de $k = 3$ pasos.

15. * Se considera el método multipaso

$$y_n = y_{n-4} + h\left(\frac{8}{3} \cdot f_{n-1} - \frac{4}{3} \cdot f_{n-2} + \frac{8}{3} \cdot f_{n-3}\right).$$

    a) Estudia la estabilidad del método.

    b) Estudia el orden de consistencia del método.

16. * Se considera el sistema de ecuaciones

$$x'(t) = t + z(t)$$
$$z'(t) = x(t) \cdot z(t)$$

    Aproxima $(x(2.03), z(2.03))$ aplicando dos pasos con $h = 0.01$ del método de Adams explícito de orden dos. Para inicializar el método utiliza la condición inicial $(x(2), z(2)) = (1, 2)$ y el dato extra $(x(2.01), z(2.01)) = (1.04015, 2.02051)$.

17. * Encuentra a y b para que el método multipaso $y_n = y_{n-2} + h(a \cdot f_{n-1} + b \cdot f_{n-2})$ sea consistente del orden lo más alto posible. ¿Es estable ese método? ¿Es explícito? ¿Crees que será mejor o peor que el método de Adams explícito de dos pasos?

18. * Se quiere resolver el problema de primer orden

$$y'(t) = t + y(t)^2, \quad y(2) = -1.$$

   a) Aproxima $y(2.01)$ e $y(2.02)$ con el método de Taylor de tercer orden y $h = 0.01$.

   b) Aproxima $y(2.03)$ e $y(2.04)$ tomando $h = 0.01$ para el método de Adams explícito de tercer orden. Realiza la inicialización con los valores obtenidos en el apartado anterior.

19. * Encuentra a y b para que el método $y_n = y_{n-2} + h \cdot (a \cdot f_n + b \cdot f_{n-3})$ sea consistente del orden lo más alto posible. ¿Es estable ese método? ¿Es explícito? ¿De cuántos pasos es?

20. * Se quiere resolver el problema de primer orden

$$y'(t) = t \cdot \sqrt{y(t)}, \quad y(0) = 1$$

del que se conocen los datos extra $y(0.01) = 1.00005$ e $y(0.02) = 1.00020$. Aproxima $y(0.03)$ e $y(0.04)$ tomando $h = 0.01$ para el método de Adams explícito de tercer orden.

21. * Encuentra a, b y c para que el método $y_n + a \cdot y_{n-1} + b \cdot y_{n-2} = h \cdot c \cdot f_n$ sea consistente del orden lo más alto posible. ¿Cuál es su orden de consistencia? ¿Es estable? ¿Y explícito?

Ejercicios propuestos, Métodos multipaso

• Calcula los coeficientes del único método explícito de dos pasos consistente de orden tres, y comprueba que no es estable y por lo tanto no es convergente.

• Para resolver el sistema de dos ecuaciones

$$y_1' = t \cdot y_1 \cdot y_2$$
$$y_2' = 3y_1 + 2y_2$$

con las condiciones iniciales $y_1(3) = -1.312258$, $y_2(3) = -0.414524$ se va a utilizar un método de Adams implícito.

- Utiliza un paso de un método de Runge–Kutta de orden dos con $h = 0.02$ para aproximar $y(3.02)$.
- Utiliza las condiciones iniciales y los resultados del apartado anterior para aproximar $y(3.04)$ dando un paso con $h = 0.02$ para el método de Adams explícito de orden dos.
- Mejora la aproximación $y(3.04)$ mediante el método de Adams implícito de dos pasos. En $t = 3$ utiliza las condiciones iniciales, en $t = 3.02$ la solución numérica que ofreció el método de Runge–Kutta y en $t = 3.04$ el valor obtenido en el apartado anterior.

Nota: La solución del problema es $y_1(3.04) = -1.23367682738$, $y_2(3.04) = -0.60841763161$.