MÉTODOS NUMÉRICOS. Curso 2009/10.

Hoja 4: Métodos en diferencias finitas.

1. * Prueba que si $u(x) \in \mathcal{C}^6(\mathbb{R})$ entonces

$$u''(x) = \frac{-u(x+2h) + 16\,u(x+h) - 30\,u(x) + 16\,u(x-h) - u(x-2h)}{12h^2} + O(h^4)$$

2. * Resuelve los siguientes problemas de contorno lineales mediante el método en diferencias centrales

   (a) $y'' - y = t$, $y(0) = 0$, $y(1) = -1$ para $h = 0.25$.

   (b) $y'' - y = 1$, $y(0) = y(3) = -1$ para $h = 0.5$.

   (c) $y'' + y = e^t$, $y(0) = y(1) = 0$ para $h = 0.25$.

   (d) $y'' - y = -2$, $y(0) = y(1) = 0$ para $h = 0.25$.

   (e) $y'' + y' - y = t$, $y(0) = -1$, $y(1) = -2$ para $h = 0.25$. Comprueba que la solución numérica coincide con la exacta, y razona el motivo.

   (f) $y'' + (t/2 - 3/2)y' - y = 0$, $y(0) = y(6) = 11$ para $h = 1$. Compara el resultado numérico con la solución analítica $y(t) = t^2 - 6t + 11$.

3. Se considera la ecuación del calor en una dimensión $u_t = u_{xx}$ junto con la condición inicial $u(x, 0) = e^{-x^2}$ para $x \in \mathbb{R}$. Aplica el método explícito en diferencias finitas con $h = 0.25$, $k = 0.01$ para aproximar la solución para $x = 0.5$, $t = 0.02$.

4. Se considera la ecuación del calor en una dimensión $u_t = u_{xx}$ junto con la condición inicial $u(x, 0) = \cos^2 x$ para $x \geq 0$ y la condición frontera $u(0, t) = 1$. Aplica el método explícito en diferencias finitas con $h = 0.25$, $k = 0.01$ para aproximar la solución para $x = 0.25$, $t = 0.02$.

5. * Se considera la ecuación del calor $u_t = u_{xx}$ con la condiciones iniciales $u(x, 0) = x^2/2$ y las condiciones frontera $u(0, t) = t$, $u(1, t) = t + 1/2$ para $0 \leq x, t \leq 1$.

   (a) Resuelve mediante el método explícito en diferencias finitas con $h = k = 1/2$.

   (b) Comprueba que la solución exacta es $u(x, t) = t + x^2/2$.

   (c) Razona por qué el método en diferencias finitas resulta exacto para este problema (aunque no se satisfaga la condición $r = k/h^2 \leq 1/2$).

6. * Se considera la ecuación de ondas $u_{tt} = u_{xx}$ con las condiciones iniciales $u(x, 0) = x^2$, $u_t(x, 0) = 0$ y las condiciones frontera $u(0, t) = t^2$, $u(1, t) = t^2 + 1$ para $0 \leq x, t \leq 1$.

   (a) Resuelve mediante el método explícito en diferencias finitas con $h = k = 1/4$.

   (b) Comprueba que la solución exacta es $u(x, t) = t^2 + x^2$.

   (c) Razona por qué el método en diferencias finitas resultó exacto para este problema.

7. * Sea R el cuadrado cuyos vértices son $\{(0, 0), (3/2, 0), (3/2, 3/2), (0, 3/2)\}$. Resuelve en el interior de R con el método en diferencias finitas la EDP $u_{xx} + u_{yy} - y\,u_x - x\,u_y + u = 0$ tomando $h = k = 0.5$ y la condición de contorno $u(x, y) = x + y$ en la frontera de R.

8. * Sea R el rectángulo cuyos vértices son $\{(0,0),(4,0),(4,3),(0,3)\}$. Resuelve en el interior de R con el método en diferencias finitas la EDP $u_{xx}+u_{yy}-y\,u_x-x\,u_y-u=0$ tomando $h=k=1$ y la condición de contorno $u(x,y)=2x-2y$ en la frontera de R.

9. * Sea R el rectángulo cuyos vértices son $\{(0,0),(2,0),(2,1),(0,1)\}$. Resuelve en el interior de R con el método en diferencias finitas la EDP $u_{xx}+u_{yy}+x\,u_x+y\,u_y-u=0$ tomando $h=k=0.5$ y la condición de contorno $u(x,y)=2x-y$ en la frontera de R.

10. * Sea R el rectángulo cuyos vértices son $\{(0,0),(4,0),(4,2),(0,2)\}$. Resuelve en el interior de R con el método en diferencias finitas la EDP $u_{xx}+u_{yy}+u_y-2x=2$ tomando $h=k=1$ y la condición de contorno $u(x,y)=x^2+2xy$ en la frontera de R.

11. * Sea R el rectángulo cuyos vértices son $\{(0,0),(2,0),(2,1),(0,1)\}$. Resuelve en el interior de R con el método en diferencias finitas la EDP $u_{xx}+u_{yy}-y\,u_x-x\,u_y-u=0$ tomando $h=k=0.5$ y la condición de contorno $u(x,y)=x-y$ en la frontera de R.

12. * Se considera el problema lineal $y''(t)=t\cdot y'(t)+y(t)+e^t$ con las condiciones de contorno $y(0)=-1$, $y(0.3)=-0.5$. Aproxima la solución mediante el método en diferencias finitas de segundo orden con $h=0.1$.

13. * Sea la ecuación del calor $u_t=u_{xx}$, con la condición inicial $u(x,0)=\operatorname{sen}(x(1-x))$ para $0\le x\le 1$ y las condiciones frontera $u(0,t)=u(1,t)=0$. Aplica el método explícito en diferencias finitas para aproximar la solución en $x=0.9$, $t=0.01$ tomando las amplitudes de paso espacial $h=0.1$ y temporal $k=0.005$.

14. * Sea la ecuación del calor $u_t=u_{xx}$, con la condición inicial $u(x,0)=(x-1)\cdot\operatorname{sen}x$ para $0\le x\le 1$ y las condiciones frontera $u(0,t)=u(1,t)=0$. Aplica el método explícito en diferencias finitas para aproximar la solución en $x=0.5$, $t=0.05$ tomando las amplitudes de paso espacial $h=0.25$ y temporal $k=0.025$.

15. * Se considera la ecuación en derivadas parciales

$$u_{xx}+u_{yy}+y\cdot u_x-u+e^x=0$$

en el rectángulo de lados $0\le x\le 0.3$ y $0\le y\le 0.2$. Usa amplitudes de paso $h=k=0.1$ y aplica diferencias finitas de segundo orden para aproximar la solución en los puntos interiores del rectángulo, tomando como condición inicial $u(x,y)=0$ en la frontera del rectángulo.