MÉTODOS NUMÉRICOS. Curso 2009/10.

Examen final de febrero. 3–2–2010.

Teoría y cuestiones.

T1 **(5 puntos)** Determinar una ecuación en diferencias lineal homogénea de coeficientes constantes homogénea de orden dos que tenga por solución $y_n = 2^n(1+n)$.

T2 **(15 puntos)** Métodos de Adams–Bashforth de k pasos.

Problemas.

1. **(20 puntos)** Encontrar explícitamente el único método de Runge–Kutta de orden tres que satisface el siguiente tablero de Butcher

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{2} & a_{21} & & \\ \frac{3}{4} & a_{31} & a_{32} & \\ \hline & b_1 & b_2 & b_3 \end{array}$$

Aplicar dicho método para encontrar la aproximación con tamaño de paso $h = 0.5$ de $y(1)$, donde $y(t)$ satisface el problema de condiciones iniciales

$$y'' + 2ty' + t^2 y = \cos t,\ \ y(0) = y'(0) = 1.$$

2. **(20 puntos)** Estudiar el orden, la estabilidad y la convergencia según los valores de los parámetros de los métodos multipaso de la forma

$$y_n + a_1 y_{n-1} + a_0 y_{n-2} = h(b_2 f_n + b_1 f_{n-1} + f_{n-2}/9)$$

donde $f_n = f(t_n, y_n)$. Obtener el de mayor orden y aplicarlo, con un paso de 0.1, para obtener $y(1.4)$, siendo $y(t)$ la solución del problema $y' = ty$ con $y(1.1) = 1$, e inicializando con un método de Taylor adecuado.

3. **(20 puntos)** Sea el problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) - \frac{x}{2}\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - y\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + u(x,y) = 2, \quad (x,y) \in (0,2) \times (0,1)$$

donde $u(x,y) = x^2 + y$ en la frontera del rectángulo $(0,2) \times (0,1)$. Para valores $h = k = 0.5$ determinar, con orden de error $\mathcal{O}(h^2 + k^2)$, los valores aproximados $u(x_i, 0.5)$ siendo $x_i = ih$, $1 \le i \le 3$.

Prácticas.

P1 Se ha integrado diez revoluciones de un problema de Dos Cuerpos con un método Runge-Kutta y se han obtenido los siguientes errores en función del tiempo de CPU empleado:

$Tiempo de CPU$	$Error$
$0.15 segundos$	4.63133
$0.37 segundos$	2.68374
$1.73 segundos$	$7.52386 \cdot 10^{-2}$
$8.00 segundos$	$7.51888 \cdot 10^{-4}$
$37.67 segundos$	$7.51662 \cdot 10^{-6}$

(a) **(5 puntos)** Elimina los datos que consideres anómalos y explica por qué lo son.

(b) **(10 puntos)** Calcula la recta de regresión entre $X = \log_{10} TiempodeCPU$ e $Y = \log_{10} Error$ y deduce el orden del método Runge-Kutta.

(c) **(5 puntos)** Estima el tiempo de CPU necesario para que el error sea de 10^{-9} unidades.

Solución del examen.

Determinar una ecuación en diferencias lineal homogénea de coeficientes constantes homogénea de orden dos que tenga por solución $y_n = 2^n(1+n)$.

Solución. Dado que la solución es

$$y_n = 2^n(1+n) = 2^n + n2^n,$$

tenemos que la ecuación

$$y_{n+2} + ay_{n+1} + by_n = 0$$

tiene por polinomio característico

$$p(t) = (t-2)^2 = t^2 - 4t + 4,$$

por lo que

$$y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 0.$$

Encontrar explícitamente el único método de Runge–Kutta de orden tres que satisface el siguiente tablero de Butcher

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{2} & a_{21} & & \\ \frac{3}{4} & a_{31} & a_{32} & \\ \hline & b_1 & b_2 & b_3 \end{array}$$

Aplicar dicho método para encontrar la aproximación con tamaño de paso $h = 0.5$ de $y(1)$, donde $y(t)$ satisface el problema de condiciones iniciales

$$y'' + 2ty' + t^2y = \cos t, \ y(0) = y'(0) = 1.$$

Solución. Las ecuaciones que deben satisfacerse son

$$b_1 + b_2 + b_3 = 1, \tag{1}$$

$$c_2 = a_{21}, \tag{2}$$

$$c_3 = a_{31} + a_{32}, \tag{3}$$

$$b_2 c_2 + b_3 c_3 = \frac{1}{2}, \tag{4}$$

$$b_2 c_2^2 + b_3 c_3^2 = \frac{1}{3}, \tag{5}$$

$$b_3 a_{32} c_2 = \frac{1}{6}. \tag{6}$$

Como $c_2 = 1/2$, de la ecuación (2) obtenemos que $a_{21} = 1/2$. Como $c_3 = 3/4$, de las ecuaciones (4) y (5) tenemos que

$$b_2 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{9}{16} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{9}{16} \end{vmatrix}} = \frac{1}{3},$$

y

$$b_3 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{9}{16} \end{vmatrix}} = \frac{4}{9}.$$

Entonces de la ecuación (1)

$$b_1 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{4}{9} = \frac{2}{9}.$$

De la ecuación (6)

$$a_{32} = \frac{1}{6 b_3 c_2} = \frac{3}{4},$$

y finalmente, de la ecuación (3)

$$a_{31} = c_3 - a_{32} = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 0.$$

Así, el tablero de Butcher es

$$\begin{array}{c|ccc}
0 & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\
\frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{4} & \\
\hline
 & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{4}{9}
\end{array}$$

Consideramos la variable $x = y'$, y el problema de condiciones iniciales de orden dos se reescribe como el sistema de orden uno

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = x, \\ x' = \cos t - t^2 y - 2tx, \\ y(0) = x(0) = 1. \end{array} \right.$$

Tomamos

$$\mathbf{f}(t, y, x) = \begin{pmatrix} x \\ \cos t - t^2 y - 2tx \end{pmatrix},$$

$t_0 = 0$, $y_0 = x_0 = 1$ y $h = 0.5$. En un primer paso

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_1 &= \begin{pmatrix} g_1^1 \\ g_1^2 \end{pmatrix} = h\mathbf{f}(t_0, y_0, x_0) = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{g}_2 &= \begin{pmatrix} g_2^1 \\ g_2^2 \end{pmatrix} = h\mathbf{f}(t_0 + h/2, y_0 + g_1^1/2, x_0 + g_1^2/2) = \begin{pmatrix} 0.625 \\ 0.132894 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{g}_3 &= \begin{pmatrix} g_3^1 \\ g_3^2 \end{pmatrix} = h\mathbf{f}(t_0 + 3h/4, y_0 + 3g_2^1/4, x_0 + 3g_2^2/4) = \begin{pmatrix} 0.549835 \\ -0.050394 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} y_1 \\ x_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y_0 \\ x_0 \end{pmatrix} + \frac{2}{9}\mathbf{g}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{g}_2 + \frac{4}{9}\mathbf{g}_3 \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{9}\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0.625 \\ 0.132894 \end{pmatrix} + \frac{4}{9}\begin{pmatrix} 0.549835 \\ -0.050394 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1.56382 \\ 1.13301 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

En el segundo paso, si $t_1 = 0.5$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_1 &= \begin{pmatrix} g_1^1 \\ g_1^2 \end{pmatrix} = h\mathbf{f}(t_1, y_1, x_1) = \begin{pmatrix} 0.566506 \\ -0.323192 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{g}_2 &= \begin{pmatrix} g_2^1 \\ g_2^2 \end{pmatrix} = h\mathbf{f}(t_1 + h/2, y_1 + g_1^1/2, x_1 + g_1^2/2) = \begin{pmatrix} 0.485708 \\ -0.882206 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{g}_3 &= \begin{pmatrix} g_3^1 \\ g_3^2 \end{pmatrix} = h\mathbf{f}(t_1 + 3h/4, y_1 + 3g_2^1/4, x_1 + 3g_2^2/4) = \begin{pmatrix} 0.235679 \\ -0.830039 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} y_2 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y_1 \\ x_1 \end{pmatrix} + \frac{2}{9}\mathbf{g}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{g}_2 + \frac{4}{9}\mathbf{g}_3 \\
&= \begin{pmatrix} 1.56382 \\ 1.13301 \end{pmatrix} + \frac{2}{9}\begin{pmatrix} 0.566506 \\ -0.323192 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0.485708 \\ -0.882206 \end{pmatrix} + \frac{4}{9}\begin{pmatrix} 0.235679 \\ -0.830039 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1.95635 \\ 0.398217 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

y así

$$y(1) \simeq 1.95635.$$

Estudiar el orden, la estabilidad y la convergencia según los valores de los parámetros de los métodos multipaso de la forma

$$y_n + a_1 y_{n-1} + a_0 y_{n-2} = h(b_2 f_n + b_1 f_{n-1} + f_{n-2}/9)$$

donde $f_n = f(t_n, y_n)$. Obtener el de mayor orden y aplicarlo, con un paso de 0.1, para obtener $y(1.4)$, siendo $y(t)$ la solución del problema $y' = ty$ con $y(1.1) = 1$, e inicializando con un método de Taylor adecuado.

Solución. Las condiciones para la convergencia son

$$\begin{cases} 1 = -a_1 - a_0, \\ 1 = a_0 + b_2 + b_1 + \frac{1}{9}, \\ 1 = -a_0 + 2b_2 - \frac{2}{9}, \\ 1 = a_0 + 3b_2 + \frac{1}{3}, \\ 1 = -a_0 + 4b_2 - \frac{4}{9}. \end{cases}$$

De la primera ecuación, necesaria para la convergencia, obtenemos

$$a_1 = -1 - a_0.$$

Para tener estabilidad, resolvemos

$$t^2 + a_1 t + a_0 = t^2 - (1 + a_0)t + a_0 = 0,$$

de donde

$$\begin{aligned} t &= \frac{1 + a_0 \pm \sqrt{(1 + a_0)^2 - 4a_0}}{2} \\ &= \frac{1 + a_0 \pm \sqrt{(1 - a_0)^2}}{2}, \end{aligned}$$

de donde obtenemos las raices 1 y a_0. Así, la condición de estabilidad será $a_0 \in [-1, 1)$.

Si además se verifica la segunda tendremos que ésta es de orden uno, que da lugar al sistema biparamétrico

$$\begin{cases} a_0 = \lambda, \\ a_1 = -1 - \lambda, \\ b_1 = \frac{8}{9} - \lambda - \mu, \\ b_2 = \mu, \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R},\ \lambda \in [-1, 1).$$

Añadiendo la tercera ecuación se tendrá orden dos, obteniendo el sistema uniparamétrico

$$\begin{cases} a_0 = \lambda, \\ a_1 = -1 - \lambda, \\ b_1 = \frac{5}{18} - \frac{3}{2}\lambda, \\ b_2 = \frac{11}{18} + \frac{\lambda}{2}, \end{cases} \quad \lambda \in [-1, 1).$$

Con la cuarta ecuación, obtenemos las soluciones siguientes. Sumando la tercera y cuarta ecuaciones y despejando b_2 obtenemos

$$b_2 = \frac{17}{45},$$

y entonces

$$a_0 = -\frac{21}{45}.$$

De la primera ecuación

$$a_1 = -\frac{24}{45},$$

y de la segunda

$$b_1 = \frac{44}{45}.$$

Como vemos al sustituir en la última ecuación

$$a_0 + 4b_2 - \frac{4}{9} = \frac{27}{45},$$

por lo que ésta nunca se verifica y el orden másximo es tres. Así el método multipaso de mayor orden (tres) es

$$y_n = \frac{24}{45} y_{n-1} + \frac{21}{45} y_{n-2} + h\left(\frac{17}{45} f_n + \frac{44}{45} f_{n-1} + \frac{1}{9} f_{n-2}\right),$$

y para inicializarlo en el ejemplo, necesitaremos el método de Taylor de orden tres.

Para ello, hemos de considerar que si $y(t)$ es la solución, entonces

$$y'(t) = ty(t),$$

por lo que

$$y''(t) = y(t) + ty'(t) = (1 + t^2)y(t),$$

e

$$y'''(t) = 2ty(t) + (1 + t^2)y'(t) = (3t + t^3)y(t),$$

y el método de Taylor es

$$\begin{aligned} y_n &= y_{n-1} + ht_{n-1}y_{n-1} + \frac{h^2}{2}(1 + t_{n-1}^2)y_{n-1} + \frac{h^3}{6}(3t_{n-1} + t_{n-1}^3)y_{n-1} \\ &= y_{n-1}\left(1 + ht_{n-1} + \frac{h^2}{2}(1 + t_{n-1}^2) + \frac{h^3}{6}(3t_{n-1} + t_{n-1}^3)\right). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $t_0 = 1.1$, $h = 0.1$ e $y_0 = 1$, obtenemos

$$y_1 = 1.12182.$$

Así, una vez inicializado el método multipaso, tenemos que éste es

$$y_n = \frac{24}{45}y_{n-1} + \frac{21}{45}y_{n-2} + h\left(\frac{17}{45}t_n y_n + \frac{44}{45}t_{n-1}y_{n-1} + \frac{1}{9}t_{n-2}y_{n-2}\right),$$

de donde

$$y_n = \frac{\frac{24}{45}y_{n-1} + \frac{21}{45}y_{n-2} + h\left(\frac{44}{45}t_{n-1}y_{n-1} + \frac{1}{9}t_{n-2}y_{n-2}\right)}{1 - \frac{17}{45}ht_n},$$

y así

$$y_2 = 1.27125,$$

e

$$y(1.4) \simeq y_3 = 1.395.$$

Sea el problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) - \frac{x}{2}\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - y\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + u(x,y) = 2, \quad (x,y) \in (0,2)\times(0,1)$$

donde $u(x,y) = x^2+y$ en la frontera del rectángulo $(0,2)\times(0,1)$. Para valores $h = k = 0.5$ determinar, con orden de error $\mathcal{O}(h^2+k^2)$, los valores aproximados $u(x_i, 0.5)$ siendo $x_i = ih$, $1 \le i \le 3$.

Solución. Tomamos las aproximaciones de orden dos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(x_i,y_j) &\simeq \frac{u(x_{i+1},y_j) - u(x_{i-1},y_j)}{2h},\\
\frac{\partial u}{\partial y}(x_i,y_j) &\simeq \frac{u(x_i,y_{j+1}) - u(x_i,y_{j-1})}{2k},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,y_j) &\simeq \frac{u(x_{i+1},y_j) - 2u(x_i,y_j) + u(x_{i-1},y_j)}{h^2},\\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i,y_j) &\simeq \frac{u(x_i,y_{j+1}) - 2u(x_i,y_j) + u(x_i,y_{j-1})}{k^2},
\end{aligned}$$

las sustituimos en la ecuación con la notación $u(x_i,y_j) = u(ih,jk) = u_{i,j}$, $h = k = 0.5$, obteniendo para $i = 1 = j$ que

$$\frac{u_{2,1} - 2u_{1,1} + u_{0,1}}{h^2} + \frac{u_{1,2} - 2u_{1,1} + u_{1,0}}{k^2} - \frac{h}{2}\frac{u_{2,1} - u_{0,1}}{2h} - k\frac{u_{1,2} - u_{1,0}}{2k} + u_{1,1} = 2,$$

que teniendo en cuenta los valores en la frontera

$$\begin{aligned}
u_{0,1} &= u(0,0.5) = 0.5,\\
u_{1,2} &= u(0.5,1) = 1.25,\\
u_{1,0} &= u(0.5,0) = 0.25,
\end{aligned}$$

da lugar a la ecuación

$$3.75u_{2,1} - 15u_{1,1} = -5.625. \tag{7}$$

Para $i = 2$ y $j = 1$,

$$\frac{u_{3,1} - 2u_{2,1} + u_{1,1}}{h^2} + \frac{u_{2,2} - 2u_{2,1} + u_{2,0}}{k^2} - \frac{2h}{2}\frac{u_{3,1} - u_{1,1}}{2h} - k\frac{u_{2,2} - u_{2,0}}{2k} + u_{2,1} = 2,$$

y con los valores en la frontera

$$\begin{aligned} u_{2,2} &= u(1,1) = 2, \\ u_{2,0} &= u(1,0) = 1, \end{aligned}$$

nos da la ecuación

$$3.5u_{3,1} - 15u_{2,1} + 4.5u_{1,1} = -9.5. \tag{8}$$

Finalmente, para $i = 3$ y $j = 1$,

$$\frac{u_{4,1} - 2u_{3,1} + u_{2,1}}{h^2} + \frac{u_{3,2} - 2u_{3,1} + u_{3,0}}{k^2} - \frac{3h}{2}\frac{u_{4,1} - u_{2,1}}{2h} - k\frac{u_{3,2} - u_{3,0}}{2k} + u_{3,1} = 2,$$

junto con los valores en la frontera

$$\begin{aligned} u_{4,1} &= u(2,0.5) = 4.5, \\ u_{3,2} &= u(1.5,1) = 3.25, \\ u_{3,0} &= u(1.5,0) = 2.25, \end{aligned}$$

da lugar a la ecuación

$$-15u_{3,1} + 4.75u_{2,1} = -34.125. \tag{9}$$

Reunimos las ecuaciones (7), (8) y (9) y resolvemos el sistema

$$\begin{cases} 3.75u_{2,1} - 15u_{1,1} = -5.625, \\ 3.5u_{3,1} - 15u_{2,1} + 4.5u_{1,1} = -9.5, \\ -15u_{3,1} + 4.75u_{2,1} = -34.125, \end{cases}$$

obteniendo que

$$\begin{aligned} u(0.5,0.5) &\simeq u_{1,1} = 0.75, \\ u(1,0.5) &\simeq u_{2,1} = 1.5, \\ u(1.5,0.5) &\simeq u_{3,1} = 2.75. \end{aligned}$$

Se ha integrado diez revoluciones de un problema de Dos Cuerpos con un método Runge-Kutta y se han obtenido los siguientes errores en función del tiempo de CPU empleado:

$TiempodeCPU$	$Error$
$0.15 segundos$	4.63133
$0.37 segundos$	2.68374
$1.73 segundos$	$7.52386 \cdot 10^{-2}$
$8.00 segundos$	$7.51888 \cdot 10^{-4}$
$37.67 segundos$	$7.51662 \cdot 10^{-6}$

1. **(5 puntos)** Elimina los datos que consideres anómalos y explica por qué lo son.
2. **(10 puntos)** Calcula la recta de regresión entre $X = \log_{10} TiempodeCPU$ e $Y = \log_{10} Error$ y deduce el orden del método Runge-Kutta.
3. **(5 puntos)** Estima el tiempo de CPU necesario para que el error sea de 10^{-9} unidades.

Solución. (a) La ecuación $Error \simeq C \cdot h^p$, en este caso, $Error \simeq D/CPU^p$, no es válida si $h > h_{máximo}$, siendo $h_{máximo}$ una cantidad que no se puede estimar *a priori* y que depende de múltiples factores, tales como del problema que se integra, el tiempo final que se alcanza y el método numérico empleado. Hay que tomar una amplitud de paso h suficientemente pequeña (lo que se traduce en un tiempo de CPU suficientemente grande) porque los desarrollos teóricos de los métodos desprecian las potencias $O(h^{p+1})$ del error global, y éstas no resultarán despreciables si h es excesivamente grande.

En nuestros datos se aprecia claramente que los tres últimos errores ($i = 3, 4, 5$) se ajustan a una fórmula $error \simeq 7.52 \cdot 10^{-2(i-2)}$, mientras que los dos primeros errores son muy grandes y no lo hacen. Por lo tanto "a ojo" podríamos descartar los dos primeros datos. Se da la particularidad de que estos dos datos anómalos presentan errores *menores* de lo esperado, situación que no es extraña en el problema de Dos Cuerpos como se vio en las prácticas de la asignatura.

Nota: Con la explicación anterior el apartado estaría completo. Sin embargo, si alguien no está del todo seguro o la considera poco rigurosa, se puede proceder calculando los valores $\log_{CPU_{i+1}/CPU_i}(Error_i/Error_{i+1})$ para todos los datos de la tabla:

$$\begin{aligned}
&\log_{0.37/0.15}(4.63133/2.68374) = \log_{2.46667} 1.72570 = 0.604333\\
&\log_{1.73/0.37}(2.68374/(7.52386 \cdot 10^{-2})) = \log_{4.67568} 35.6697 = 2.31740\\
&\log_{8.00/1.73}(7.52386 \cdot 10^{-2}/(7.51888 \cdot 10^{-4})) = \log_{4.62428} 100.066 = 3.00775\\
&\log_{37.67/8.00}(7.51888 \cdot 10^{-4}/(7.51662 \cdot 10^{-6})) = \log_{4.70875} 100.030 = 2.97238
\end{aligned}$$

Estos logaritmos deberían parecerse mucho al orden p del método. Los dos últimos resultados se ajustan con mucha precisión a un orden $p = 3$, mientras que los dos primeros no se parecen en nada. Esto reafirma la idea intuitiva de que los dos primeros datos de la tabla son anómalos.

(b) Eliminamos los dos primeros datos de la tabla y calculamos los logaritmos decimales de los tres restantes

$$\begin{array}{r|r} x_3 = \log_{10}(1.73) = 0.238046 & y_3 = \log_{10}(7.52386 \cdot 10^{-2}) = -1.12356 \\ x_4 = \log_{10}(8.00) = 0.903090 & y_4 = \log_{10}(7.51888 \cdot 10^{-4}) = -3.12385 \\ x_5 = \log_{10}(37.67) = 1.57600 & y_5 = \log_{10}(7.51662 \cdot 10^{-6}) = -5.12398 \end{array}$$

Las medias son

$$\overline{X} = \frac{0.238046 + 0.903090 + 1.57600}{3} = \frac{2.71714}{3} = 0.905713$$
$$\overline{Y} = \frac{-1.12356 - 3.12385 - 5.12398}{3} = \frac{-9.37139}{3} = -3.12380$$

Hacemos lo mismo con las variables $X \cdot Y$ y X^2, necesarias para calcular $Cov\,(X, Y)$ y $Var\,(X)$

$$\begin{array}{r|r} x_3 \cdot y_3 = (0.238046) \cdot (-1.12356) = -0.267459 & x_3^2 = (0.238046)^2 = 0.0566659 \\ x_4 \cdot y_4 = (0.903090) \cdot (-3.12385) = -2.82112 & x_4^2 = (0.903090)^2 = 0.815572 \\ x_5 \cdot y_5 = (1.57600) \cdot (-5.12398) = -8.07539 & x_5^2 = (1.57600)^2 = 2.48378 \end{array}$$

y calculamos sus medias

$$\overline{X \cdot Y} = \frac{-0.267459 - 2.82112 - 8.07539}{3} = \frac{-11.1634}{3} = -3.72113$$
$$\overline{X^2} = \frac{0.0566659 + 0.815572 + 2.48378}{3} = \frac{3.35602}{3} = 1.11867$$

Calculamos ahora covarianza y varianza.

$$Cov(X, Y) = \overline{X \cdot Y} - \overline{X} \cdot \overline{Y} = -3.72113 - 0.905713 \cdot (-3.12380) = -0.891864$$
$$Var(X) = Cov(X, X) = \overline{X^2} - \left(\overline{X}\right)^2 = 1.11867 - (0.905713)^2 = 0.298354$$

A partir de aquí deducimos la ecuación de la recta de regresión.

$$\begin{aligned} Y - \overline{Y} &= \frac{Cov(X, Y)}{Var(X)} \cdot \left(X - \overline{X}\right) \Longrightarrow \\ Y - (-3.12380) &= \frac{-0.891864}{0.298354} \cdot (X - 0.905713) \Longrightarrow \\ Y &= -3.12380 - 2.98928 \cdot (X - 0.905713) \Longrightarrow \\ Y &= -0.416370 - 2.98928 \cdot X \end{aligned}$$

La pendiente $-2.98928 \simeq 3$ muestra sin lugar a dudas que el orden del método empleado es $p = 3$.

(c) La vía más rápida es despejar $Y = \log_{10} Error = \log_{10} 10^{-9} = -9$ y resolver a partir de la recta.

$$-9 = -0.416370 - 2.98928 \cdot X \Longrightarrow X = \frac{-9 + 0.416370}{-2.98928} = 2.87147$$

Despejamos $TiempodeCPU = 10^Y = 10^{2.87147} = 743.824$ segundos, es decir, 12 minutos, 23 segundos y 824 milésimas de segundo.

Nota: También podía haberse despejado la fórmula a partir de la recta

$$Error = 10^Y = 10^{-0.416370-2.98928\cdot X} = 10^{-0.416370}CPU^{-2.98928} \Longrightarrow Error \simeq \frac{0.383380}{CPU^{2.98928}}$$

Tomando $Error = 10^{-9}$ y despejando obtenemos

$$TiempodeCPU = \left(\frac{0.383380}{10^{-9}}\right)^{1/2.98928} = 743.825\ segundos$$

La diferencia en la última cifra de ambos resultados está provocada por la aritmética finita. El ejercicio se ha resuelto redondeando a 6 cifras significativas, si se hubiese utilizado una aritmética diferente se habrían obtenido resultados ligeramente distintos.