

## MATEMÁTICAS 2. GIE

### TRANSFORMADA DE LAPLACE

1. Calcular la transformada de Laplace de las siguientes funciones

$$(a) f(t) = \sin(3t) \quad (b) f(t) = e^{5t} \quad (c) f(t) = e^{5t} \cos 3t \quad (d) f(t) = te^t$$

$$(e) f(t) = t^3 - t \quad (f) f(t) = \sinh t \quad (g) f(t) = \cos t \sin t \quad (h) f(t) = e^t \cos t \sin(2t)$$

2. Una función  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  se dice que es *periódica con periodo*  $a > 0$  o *a-periódica* si para cada  $t \geq 0$  se tiene que  $f(t) = f(t + a)$ . Comprobar que en caso de existir la transformada de Laplace de  $f$ , se verifica la igualdad

$$\mathcal{L}(f)(z) = \frac{1}{1 - e^{-az}} \int_0^a e^{-tz} f(t) dt$$

3. Usar el resultado de la actividad anterior para calcular la transformada de Laplace de la función periódica de periodo 2 definida en  $[0, 2]$  por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1], \\ 2 - x & \text{si } x \in [1, 2]. \end{cases}$$

4. Dada la función,

$$f(t) = \int_0^t e^{-s} \sin s ds, \quad t \geq 0$$

calcular su transformada de Laplace. Calcular asimismo la transformada de Laplace de  $g(t) = tf(t)$ .

5. Sea la función  $E(t)$  que a cada número  $t \geq 0$  le asigna su parte entera, es decir,  $E(t)$  es un número natural de forma que  $E(t) \leq t < E(t) + 1$ . Calcular la transformada de Laplace de la función  $E$ .

6. Calcular la transformada de Laplace de la función,

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 1, & \text{si } 1 < t \leq 2 \\ 0, & \text{si } t > 2 \end{cases}$$

7. Calcular la transformada de Laplace de las siguientes funciones.

$$(a) f(t) = |\sin t| \quad (b) g(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ t, & \text{si } t > 1 \end{cases} \quad (c) h(t) = \begin{cases} t^2 - 1, & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ 2, & \text{si } t > 2 \end{cases}$$

8. Calcular la transformada de Laplace de la función escalonada

$$f(t) = \begin{cases} \pi, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & 1 < t \leq 2 \end{cases}$$

extendida a todo  $[0, +\infty[$  como 2-periódica.

9. ¿Existirá la transformada inversa de Laplace de las siguientes funciones de variable compleja? Razonar las respuestas.

$$(a) F(z) = \frac{z}{\sin z} \quad (b) F(z) = \frac{e^{-z}}{z} \quad (c) F(z) = \frac{z}{1+z^2} \quad (d) F(z) = \frac{e^{-\pi z}}{1+\cos(z^2)}$$

10. Calcular la transformada inversa de Laplace de las funciones siguientes

$$(a) F(z) = \frac{z^2}{1+z^3} \quad (b) F(z) = \frac{1}{(z-i)(z^2-2)} \quad (c) F(z) = \frac{z+7}{z^2+2z+5}$$

$$(d) F(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)(z^2+2z+10)}$$

11. Calcular la transformada inversa de Laplace de las siguientes funciones:

$$(a) F(z) = \frac{ze^{-\pi z}}{z^2+2z+5} \quad (b) F(z) = \frac{(z-1)e^{-z}}{z^3+2} \quad (c) F(z) = \frac{z+1}{e^z z^2(z^2+9)} \quad (d) F(z) = \frac{z+1}{z^4}$$

12. Calcular las transformadas inversas de Laplace de las funciones:

$$(a) F(z) = \frac{e^{-az}}{1+z^2}, \quad (a > 0) \quad (b) F(z) = \frac{z}{(z-1)(z+2)^2} \quad (c) F(z) = \frac{e^{-z}}{z} + \frac{z-1}{z^2+2}$$

$$(d) F(z) = \frac{z^2}{(z-2)(z^3-1)}$$

13. Utilizar la transformada de Laplace para resolver los siguientes problemas de Cauchy asociados a ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes:

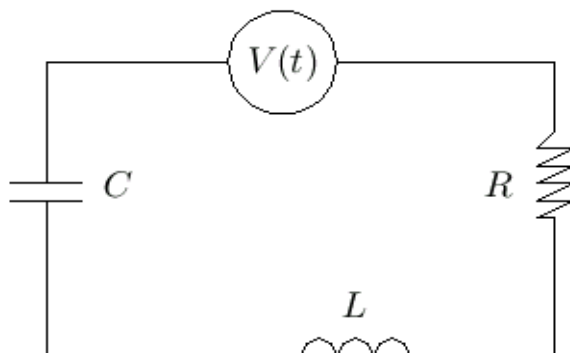
$$\left. \begin{aligned} y'''(t) + 5y''(t) + 17y'(t) + 13y(t) &= 1 \\ y(0) = y'(0) &= 1, \quad y''(0) = 0 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} y'(t) + 3y(t) &= e^{-2t} \\ y(0) &= 2 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} y''(t) + y'(t) - 2y(t) &= 5e^{-t} \sin t \\ y(0) = 1, \quad y'(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} y''(t) + y(t) &= t \\ y(0) = 1, \quad y'(0) &= -2 \end{aligned} \right\}$$

14. Resolver los siguientes problemas de valores iniciales:

$$\left. \begin{aligned} y''(t) + y'(t) &= \phi(t), \text{ con } \phi(t) = \begin{cases} t, & t < 1 \\ 0, & t \geq 1 \end{cases} \\ y(0) = 0, \quad y'(0) &= 2 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} y''(t) + y(t) &= \sin t, \\ y(0) = y'(0) &= -1 \end{aligned} \right\}$$

15. Consideremos un circuito LCR como el de la figura



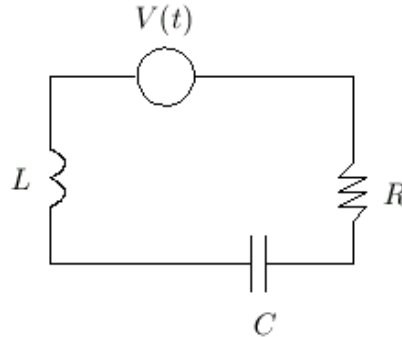
de forma que  $L = 2$  henrios,  $R = 16$  ohmios,  $C = 0.02$  faradios y la fuerza electromotriz va oscilando con el tiempo siguiendo la relación  $V(t) = 100 \sin(3t)$ .

- (a) Utilizar las leyes de Kirchhoff para obtener la ecuación diferencial que verifica la función que describe la carga en función del tiempo.
  - (b) Determinar la carga en función del tiempo si en el momento de conectar el circuito,  $t = 0$ , la carga del condensador es igual a cero.
  - (c) Determinar la carga del condensador en función del tiempo si inicialmente es de 1.5 culombios.
16. En el caso de un circuito LCR en el que no se tiene ninguna resistencia, la ecuación diferencial que describe la carga del condensador en función del tiempo es de la forma,

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2}(t) + \frac{Q(t)}{C} = E(t)$$

y se denomina *oscilador armónico*. Resolver la ecuación anterior en los siguientes casos:

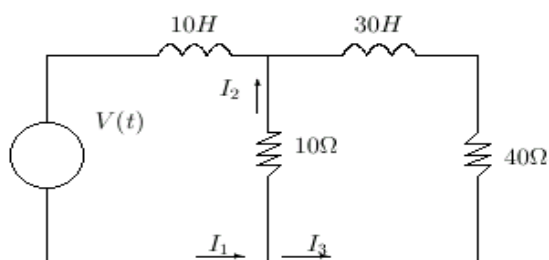
- (a) La fuerza electromotriz  $E$  es constante y la carga e intensidad de corriente en el momento inicial son ambas nulas.
  - (b) La fuerza electromotriz es de la forma  $\sin(\omega t + \sigma)$ , con  $\omega, \sigma \in \mathbb{R}$ , mientras que  $Q(0) = 1$  al conectar el circuito.
17. Consideremos el circuito eléctrico de la figura.



Calcular la intensidad de corriente que pasa por los cables de dicho circuito en los siguientes casos:

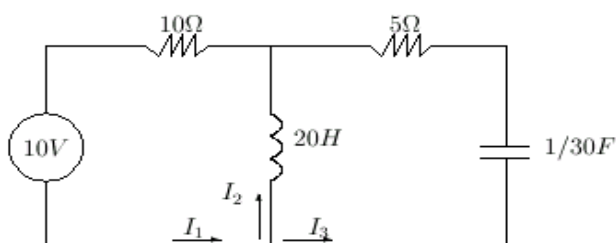
- (a)  $C = 1F$ ;  $R = 1\Omega$ ;  $L = 0H$ ;  $V(t) = \sin t$ .
- (b)  $C = 1F$ ;  $R = 2\Omega$ ;  $L = 0H$ ;  $V(t) = e^t \cos(2t)$ .
- (c)  $C = 2F$ ;  $R = 3\Omega$ ;  $L = 0H$ ;  $V(t) = e^{3t}$ .
- (d)  $C = 1F$ ;  $R = 1\Omega$ ;  $L = 1H$ ;  $V(t) = \sin t$ .
- (e)  $C = 0.5F$ ;  $R = 1\Omega$ ;  $L = 1H$ ;  $V(t) = t^2$ .
- (f)  $C = 0.25F$ ;  $R = 4\Omega$ ;  $L = 2H$ ;  $V(t) = -t \cos t$ .

18. Determinar las intensidades que circulan por el siguiente circuito, inicialmente descargado (condiciones iniciales nulas), en los siguientes casos:

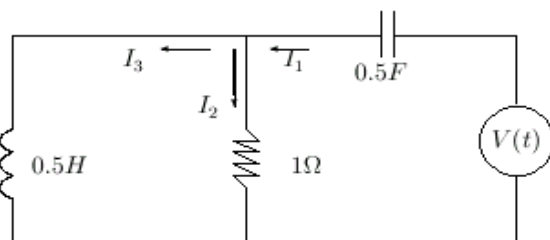


- (a)  $V(t) = 20V$ .
- (b)  $V(t) = \cos tV$ .
- (c)  $V(t) = 10tV$ .

19. Suponiendo condiciones iniciales nulas, calcular las intensidades del siguiente circuito

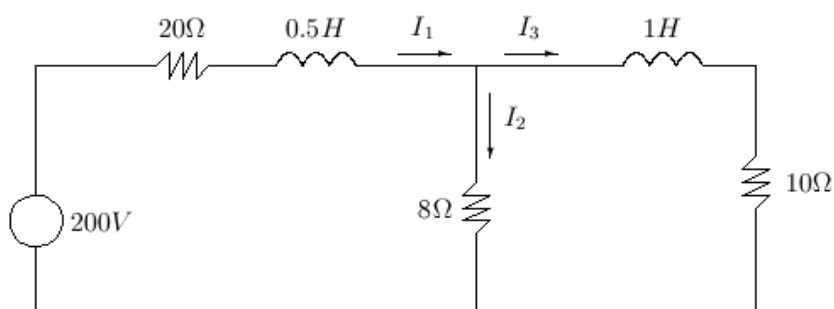


20. Suponiendo condiciones iniciales nulas, calcular las intensidades del siguiente circuito



donde  $V(t) = \cos(3t)$ .

21. Dado el circuito de la figura, obtener la intensidad que circula por cada una de los cables sabiendo que inicialmente estaba descargado.



22. Resolver el ejercicio anterior suponiendo que el voltaje es de  $\sin(2\pi t)$  voltios.
23. Usar la transformada de Laplace para resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineales:

$$\left. \begin{aligned} 2y_1''(t) - y_2''(t) - y_1'(t) - y_2'(t) + 9y_1(t) - 3y_2(t) &= 0 \\ 2y_1''(t) - y_2''(t) + y_1'(t) + y_2'(t) + 7y_1(t) - 5y_2(t) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

con las condiciones iniciales:

$$y_1(0) = y_1'(0) = 1, \quad y_2(0) = y_2'(0) = 0$$

24. Encuentra la solución del siguiente problema de Cauchy,

$$\left. \begin{aligned} y''(t) + y(t) &= \operatorname{sen}(\omega t) \\ y(0) = 0, \quad y'(0) &= 1 \end{aligned} \right\}$$

con  $\omega > 1$ .

25. Encuentra la solución del oscilador armónico dado por la ecuación diferencial:

$$y''(t) + \beta y(t) = \sin(\omega t), \quad (\beta \in \mathbb{R}, \omega > 0)$$

que verifica las condiciones iniciales:

$$y(0) = -1/2, \quad y'(0) = 0 \quad (06-09-99)$$

26. Resuelve el siguiente problema de Cauchy:

$$\left. \begin{aligned} y''(t) + \beta y(t) &= \cos(\omega t) \\ y(0) = -1, \quad y'(0) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

distinguiendo los casos en que  $0 < \beta$  y  $0 > \beta$ .

27. Obtener la solución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales,

$$\left. \begin{aligned} 3y_1'(t) + y_2'(t) - 2y_1(t) &= 3 \sin t + 5 \cos t \\ 2y_1'(t) + y_2'(t) + y_2(t) &= \sin t + \cos t \end{aligned} \right\}$$

para las condiciones iniciales,  $y_1(0) = 0$ ,  $y_2(0) = -1$ .

28. Encontrar las funciones de transferencia de los sistemas definidos por las ecuaciones diferenciales del ejercicio 13.
29. Se consideran las siguientes funciones de transferencia de un sistema lineal en tiempo continuo. Determinar en qué casos los sistemas definidos son estables.

$$(a) F(z) = \frac{z^2 + 2}{z^3 + z} \quad (b) F(z) = \frac{z}{(z^2 + 2z + 1)(z^2 + z + 2)}$$

$$(c) F(z) = \frac{1}{(z^2 - 2z + 1)(z^2 + z + 2)}$$

$$(d) F(z) = \frac{2}{z^3 - z^2} \quad (e) F(z) = \frac{z}{(z^3 + z + 2)} \quad (f) F(z) = \frac{z^2}{z^4 - 2z^2 + 1}$$

30. Determinar los valores de la intensidad que circula por el circuito de la siguiente figura cuando el tiempo es suficientemente grande.

