

Matemáticas 2 (GIE). 23–1–2018

- Nombre y apellidos:
- DNI:
- Se elegirá entre las preguntas 6 y 7, salvo que se tenga concedido la prueba de evaluación global.

1. **(1 punto)** Enunciar con precisión el teorema de los residuos y esbozar la demostración.

Solución. Teoría.

2. **(0.75 puntos)** Demostrar que si una función f es $2L$ -periódica, continua e impar, su desarrollo de Fourier sólo tiene términos tipo seno. Poner un ejemplo.

Solución. Teoría.

3. **(0.75 puntos)** Demostrar que la transformada de Laplace de una función derivable f verifica que

$$L[f'](z) = zL[f](z) - f(0).$$

Solución. Teoría.

4. **(1.25 puntos)** Dada la curva $\gamma(t) = 1 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $r > 0$, calcular

$$\int_{\gamma} \frac{z}{z^4 - 6z^3 + 17z^2 - 28z + 20} dz.$$

Solución. La función

$$f(z) = \frac{z}{z^4 - 6z^3 + 17z^2 - 28z + 20}$$

tiene polos $1 \pm 2i$ simples y 2 doble. Tenemos que $d_1 = |1 - 2| = 1$ y $d_2 = |1 - 1 \pm 2i| = 2$. Distinguimos entonces los siguientes casos:

- Si $r < 1$ la función $f(z)$ es derivable en el interior de la curva y por el Teorema de Cauchy se tiene que

$$\int_{\gamma} \frac{z}{z^4 - 6z^3 + 17z^2 - 28z + 20} dz = 0.$$

- Si $1 < r < 2$ la función $f(z)$ tiene el polo 2 en el interior de la curva. Por el teorema de los residuos se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{z}{z^4 - 6z^3 + 17z^2 - 28z + 20} dz &= 2\pi i \operatorname{Res}(f, 2) \\ &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow 2} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} ((z-2)^2 f(z)) \\ &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow 2} \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{z^2 - 2z + 5} \right) \\ &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow 2} \frac{-z^2 + 5}{(z^2 - 2z + 5)^2} \\ &= \pi i \frac{2}{25}. \end{aligned}$$

- Si $r > 2$ la función $f(z)$ tiene todos los polos en el interior de la curva. Por el teorema de los residuos

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} \frac{z}{z^4 - 6z^3 + 17z^2 - 28z + 20} dz &= 2\pi i (\text{Res}(f, 2) + \text{Res}(f, 1 - 2i) + \text{Res}(f, 1 + 2i)) \\
 &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow 2} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} ((z - 2)^2 f(z)) \\
 &\quad + 2\pi i \lim_{z \rightarrow 1-2i} (z - 1 + 2i) f(z) + 2\pi i \lim_{z \rightarrow 1+2i} (z - 1 - 2i) f(z) \\
 &= \pi i \frac{2}{25} + 2\pi i \lim_{z \rightarrow 1-2i} \frac{z}{(z - 2)^2 (z - 1 - 2i)} \\
 &\quad + 2\pi i \lim_{z \rightarrow 1+2i} \frac{z}{(z - 2)^2 (z - 1 + 2i)} \\
 &= \pi i \frac{2}{25} - \pi \frac{2 + 11i}{100} - \pi \frac{2 - 11i}{10} = 0.
 \end{aligned}$$

5. (1.25 puntos) Resolver el siguiente problema

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{yy} - u, & t > 0, \quad y \in (0, 2\pi), \\ u(t, 0) = u(t, 2\pi) = 0, & t > 0, \\ u(0, y) = \sin(30y), & y \in (0, 2\pi), \\ u_t(0, y) = \sin(10y), & y \in (0, 2\pi). \end{cases}$$

Solución. Proponemos una solución de la forma $u(t, y) = T(t)Y(y)$, derivando y sustituyendo en la ecuación en derivadas parciales tenemos la ecuación

$$T''(t) + (1 + \lambda)T(t) = 0,$$

y utilizando las condiciones de contorno el problema

$$\begin{cases} Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, \\ Y(0) = Y(2\pi) = 0, \end{cases}$$

que da lugar al conjunto de soluciones

$$Y_n(y) = \sin\left(\frac{n}{2}y\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

donde

$$\lambda = \frac{n^2}{4}.$$

Sustituyendo λ en la ecuación en T obtenemos

$$T''(t) + \left(1 + \frac{n^2}{4}\right)T(t) = 0,$$

que tiene solución general

$$T_n(t) = a_n \cos\left(t\sqrt{1 + \frac{n^2}{4}}\right) + b_n \sin\left(t\sqrt{1 + \frac{n^2}{4}}\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

Proponemos la solución formal de la forma

$$u(t, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(t\sqrt{1 + \frac{n^2}{4}}\right) + b_n \sin\left(t\sqrt{1 + \frac{n^2}{4}}\right) \right) \sin\left(\frac{n}{2}y\right).$$

De la condición inicial $u(0, y)$ obtenemos

$$u(t, y) = \sin(30y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n}{2}y\right)$$

de donde

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(30y) \sin\left(\frac{n}{2}y\right) dy = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 60, \\ 1 & \text{si } n = 60. \end{cases}$$

Derivamos la solución formal

$$u_t(t, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{1 + \frac{n^2}{4}} \left(-a_n \sin\left(t\sqrt{1 + \frac{n^2}{4}}\right) + b_n \cos\left(t\sqrt{1 + \frac{n^2}{4}}\right) \right) \sin\left(\frac{n}{2}y\right).$$

De la condición inicial $u_t(0, y)$ obtenemos

$$u_t(t, y) = \sin(10y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sqrt{1 + \frac{n^2}{4}} \sin\left(\frac{n}{2}y\right)$$

de donde

$$b_n \sqrt{1 + \frac{n^2}{4}} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(10y) \sin\left(\frac{n}{2}y\right) dy = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 20, \\ 1 & \text{si } n = 20, \end{cases}$$

con lo que

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 20, \\ \frac{1}{\sqrt{101}} & \text{si } n = 20. \end{cases}$$

La solución del problema es

$$u(t, y) = \frac{1}{\sqrt{101}} \sin\left(t\sqrt{101}\right) \sin(10y) + \cos\left(t\sqrt{901}\right) \sin(30y).$$

6. (2 puntos) Dada la ecuación en diferencias

$$y_{n+2} + y_{n+1} + \frac{1}{2}y_n = (2, 1, 1, 1, \dots),$$

encontrar la solución para tiempos suficientemente grandes.

Solución. Tomamos la transformada Z y transformamos la ecuación en diferencias en la ecuación algebraica

$$Z[y_{n+2} + y_{n+1} + \frac{1}{2}y_n](z) = Z[(2, 1, 1, 1, \dots)](z)$$

y utilizando sus propiedades y teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} Z[(2, 1, 1, 1, \dots)](z) &= 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} = 2 + \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} \\ &= 2 + \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{2z - 1}{z - 1} \end{aligned}$$

obtenemos

$$\left(z^2 + z + \frac{1}{2}\right) Z[y_n](z) - z^2 y_0 - z(y_1 + y_0) = \frac{2z - 1}{z - 1},$$

de donde

$$Z[y_n](z) = \frac{z^2 y_0 + z(y_1 + y_0)}{z^2 + z + \frac{1}{2}} + \frac{1}{z^2 + z + \frac{1}{2}} \frac{2z - 1}{(z - 1)}.$$

La función de transferencia es

$$T(z) = \frac{1}{z^2 + z + \frac{1}{2}}$$

que tiene polos $\frac{-1 \pm i}{2}$ que tienen módulo menor que 1. Por lo tanto el sistema es asintóticamente estable y para obtener la solución estacionaria no necesitamos considerar las condiciones iniciales y basta con calcular la transformada inversa de

$$\frac{1}{z^2 + z + \frac{1}{2}} \frac{2z - 1}{(z - 1)}$$

en aquellos polos que tengan modulo mayor o igual que 1. Descomponemos en fracciones simples

$$\frac{2z - 1}{(z^2 + z + \frac{1}{2})(z - 1)} = \frac{A}{z - 1} + \frac{B}{z - \frac{-1+i}{2}} + \frac{C}{z - \frac{-1-i}{2}}$$

de donde

$$A = \frac{2}{5}$$

y entonces

$$\frac{2}{5} \frac{1}{z - 1} = \frac{2}{5z} \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{2}{5z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{5} \frac{1}{z^{n+1}},$$

por lo que la solución estacionaria será

$$y_n = \frac{2}{5}.$$

7. (2 puntos) Utilizar la transformada de Laplace para resolver el problema

$$\begin{cases} y'' + 6y' + 10y = h_5(t)t, \\ y(0) = y'(0) = 4. \end{cases}$$

Solución. Tomamos la transformada de Laplace y utilizando sus propiedades tenemos que el problema se transforma en

$$(z^2 + 6z + 10)L[y](z) - 28 - 4z = L[h_5(t)t](z).$$

Calculamos aparte

$$L[h_5(t)t](z) = \int_0^{\infty} h_5(t)te^{-zt}dt = \int_5^{\infty} te^{-zt}dt = \frac{5z + 1}{z^2}e^{-5z}$$

y entonces

$$L[y](z) = \frac{28 + 4z}{z^2 + 6z + 10} + \frac{5z + 1}{z^2(z^2 + 6z + 10)}e^{-5z}.$$

Utilizando la transformada inversa tenemos

$$\begin{aligned} y(t) &= L^{-1} \left[\frac{28 + 4z}{z^2 + 6z + 10} \right] (t) + L^{-1} \left[\frac{5z + 1}{z^2(z^2 + 6z + 10)} e^{-5z} \right] (t) \\ &= L^{-1} \left[\frac{28 + 4z}{z^2 + 6z + 10} \right] (t) + h_5(t)L^{-1} \left[\frac{5z + 1}{z^2(z^2 + 6z + 10)} \right] (t - 5). \end{aligned}$$

Los polos son $-3 \pm i$ y 0. Calculamos aparte

$$L^{-1} \left[\frac{28+4z}{z^2+6z+10} \right] (t) = \text{Res} \left(\frac{28+4z}{z^2+6z+10} e^{zt}, -3+i \right) + \text{Res} \left(\frac{28+4z}{z^2+6z+10} e^{zt}, -3-i \right).$$

Por un lado

$$\begin{aligned} \text{Res} \left(\frac{28+4z}{z^2+6z+10} e^{zt}, -3+i \right) &= \lim_{z \rightarrow -3+i} \frac{28+4z}{z+3+i} e^{zt} = \frac{8+2i}{i} e^{(-3+i)t}, \\ \text{Res} \left(\frac{8+4z}{z^2+6z+10} e^{zt}, -3-i \right) &= \lim_{z \rightarrow -3-i} \frac{8+4z}{z+3-i} e^{zt} = \frac{-8+2i}{i} e^{(-3-i)t}, \end{aligned}$$

con lo que

$$\begin{aligned} L^{-1} \left[\frac{8+4z}{z^2+6z+10} \right] (t) &= \frac{8+2i}{i} e^{(-3+i)t} + \frac{-8+2i}{i} e^{(-3-i)t} \\ &= e^{-3t} \left(\frac{8(e^{it} - e^{-it})}{i} + \frac{2i(e^{it} + e^{-it})}{i} \right) \\ &= e^{-3t} (16 \sin t + 4 \cos t). \end{aligned}$$

Calculamos ahora

$$\begin{aligned} L^{-1} \left[\frac{5z+1}{z^2(z^2+6z+10)} \right] (t) &= \text{Res} \left(\frac{5z+1}{z^2(z^2+6z+10)} e^{zt}, -0 \right) \\ &\quad + \text{Res} \left(\frac{5z+1}{z^2(z^2+6z+10)} e^{zt}, -3+i \right) \\ &\quad + \text{Res} \left(\frac{5z+1}{z^2(z^2+6z+10)} e^{zt}, -3-i \right). \end{aligned}$$

Calculamos aparte

$$\begin{aligned} \text{Res} \left(\frac{5z+1}{z^2(z^2+6z+10)} e^{zt}, -0 \right) &= \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{5z+1}{z^2+6z+10} e^{zt} \right) = \frac{t}{10} + \frac{11}{25}, \\ \text{Res} \left(\frac{5z+1}{z^2(z^2+6z+10)} e^{zt}, -3+i \right) &= \lim_{z \rightarrow -3+i} \frac{5z+1}{z^2(z+3+i)} e^{zt} = \left(-\frac{11}{50} + \frac{71}{100}i \right) e^{(-3+i)t}, \\ \text{Res} \left(\frac{5z+1}{z^2(z^2+6z+10)} e^{zt}, -3-i \right) &= \lim_{z \rightarrow -3-i} \frac{5z+1}{z^2(z+3-i)} e^{zt} = \left(-\frac{11}{50} - \frac{71}{100}i \right) e^{(-3-i)t}, \end{aligned}$$

con lo que

$$\begin{aligned} L^{-1} \left[\frac{5z+1}{z^2(z^2+6z+10)} \right] (t) &= \frac{t}{10} + \frac{11}{25} + \left(-\frac{11}{50} + \frac{71}{100}i \right) e^{(-3+i)t} + \left(-\frac{11}{50} - \frac{71}{100}i \right) e^{(-3-i)t} \\ &= \frac{t}{10} + \frac{11}{25} + e^{-3t} \left(-\frac{11}{50}(e^{it} + e^{-it}) + \frac{71}{100}i(e^{it} - e^{-it}) \right) \\ &= \frac{t}{10} + \frac{11}{25} + e^{-3t} \left(-\frac{11}{25} \cos t - \frac{71}{50} \sin t \right). \end{aligned}$$

La solución pedida es entonces

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-3t} (16 \sin t + 4 \cos t) + h_5(t) \left(\frac{t-5}{10} + \frac{11}{25} + e^{-3(t-5)} \left(-\frac{11}{25} \cos(t-5) - \frac{71}{50} \sin(t-5) \right) \right) \\ &= e^{-3t} (16 \sin t + 4 \cos t) + h_5(t) \left(\frac{t}{10} - \frac{3}{50} + e^{-3(t-5)} \left(-\frac{11}{25} \cos(t-5) - \frac{71}{50} \sin(t-5) \right) \right). \end{aligned}$$