Matemáticas 2 (GIE). 21–6–2018

- Nombre y apellidos:
- DNI:
- Se eligirá entre las preguntas 6 y 7, salvo que se tenga concedido la prueba de evaluación global.

1. **(1 punto)** Enunciar con precisión las fórmulas integrales de Cauchy y esbozar la demostración.

   Solución. Teoría.

2. **(1 punto)** Encontrar las soluciones del problema de contorno

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \\ y(0) = y(L) = 0, \end{cases}$$

   donde λ es un número real y $L > 0$.

   Solución. Teoría.

3. **(1 punto)** Demostrar que la transformada de Laplace de una función f verifica que

$$L[e^{at} f(t)](z) = L[f](z-a)$$

   para todo número complejo a. Como aplicación obtener la transformada de Laplace de $e^{at}\cos(\omega t)$ suponiendo conocida la transformada de $\cos(\omega t)$.

   Solución. Teoría.

4. **(1.5 puntos)** Dada la curva $\gamma(t) = 1 + 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, y el número complejo α, calcular

$$\int_\gamma \frac{z}{(z-\alpha)(z^2+2z+2)} dz$$

   Solución. Las singularidades de la función

$$f(z) = \frac{z}{(z-\alpha)(z^2+2z+2)}$$

   son α y $-1 \pm i$.

   - Si $\alpha = 0$, la singularidad es evitable. Entonces

$$\int_\gamma \frac{z}{(z-\alpha)(z^2+2z+2)} dz = \int_\gamma \frac{1}{z^2+2z+2} dz = 0,$$

     ya que $-1 \pm i$ no están en el interior de la cruva γ.

   - Si $\alpha = -1 - i$, tenemos que éste es polo doble y $-1 + i$ es simple. Entonces

$$\int_\gamma \frac{z}{(z-\alpha)(z^2+2z+2)} dz = \int_\gamma \frac{z}{(z+1+i)^2(z+1-i)} dz = 0,$$

     ya que $-1 \pm i$ no están en el interior de la cruva γ.

- Si $\alpha = -1+i$ se trata de un polo doble y $-1-i$ simple. Entonces
$$\int_\gamma \frac{z}{(z-\alpha)(z^2+2z+2)}dz = \int_\gamma \frac{z}{(z+1+i)(z+1-i)^2}dz = 0,$$
ya que $-1 \pm i$ no están en el interior de la cruva γ.
- Finalmente, si $\alpha \notin \{0, -1\pm i\}$ tenemos tres polos simples y dos casos. Si $|\alpha - 1| > 2$, entonces
$$\int_\gamma \frac{z}{(z-\alpha)(z^2+2z+2)}dz = 0,$$
ya que $-1 \pm i$ no están en el interior de la cruva γ. Si $|\alpha - 1| < 2$, se tiene que
$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{z}{(z-\alpha)(z^2+2z+2)}dz &= 2\pi i \operatorname{Re}s\left(\frac{z}{(z-\alpha)(z^2+2z+2)}, \alpha\right) \\ &= 2\pi i \lim_{z\to\alpha} \frac{z(z-\alpha)}{(z-\alpha)(z^2+2z+2)} \\ &= 2\pi i \frac{\alpha}{\alpha^2+2\alpha+2}.\end{aligned}$$
Nótese que $\alpha^2 + 2\alpha + 2 \neq 0$ debido a que $\alpha \neq 1 \pm i$.

5. **(1.5 puntos)** Resolver el siguiente problema
$$\left\{\begin{array}{l} u_t = u_{yy} + u, \ t > 0, \ y \in (0,10), \\ u(t,0) = u(t,10) = 0, \ t > 0, \\ u(0,y) = y(y-10), \ y \in (0,10). \end{array}\right.$$

Solución. Proponemos una solución de la forma $u(t,y) = T(t)Y(y)$, que sustituyendo en la ecuación original nos da
$$T'(t)Y(y) = T(t)Y''(y) + T(t)Y(y),$$
de donde
$$\frac{T'(t) - T(t)}{T(t)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda,$$
de donde obtenemos el problema de contorno
$$\left\{\begin{array}{l} Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, \\ Y(0) = Y(10) = 0, \end{array}\right.$$
con solución $Y_n(y) = \sin\left(\frac{n\pi}{10}y\right)$, $\lambda = \left(\frac{n\pi}{10}\right)^2$, $n = 1, 2, ...$ La ecuación en $T(t)$ es de la forma
$$T'(t) = \left(1 - \left(\frac{n\pi}{10}\right)^2\right) T(t),$$
con solución general
$$T(t) = c_n e^{\left(1-\left(\frac{n\pi}{10}\right)^2\right)t}, \quad n = 1, 2, ...$$
Así la solución general es de la forma
$$u(t,y) = \sum_{n=1}^\infty c_n e^{\left(1-\left(\frac{n\pi}{10}\right)^2\right)t} \sin\left(\frac{n\pi}{10}y\right).$$

Utilizando la condición incial

$$u(0,y) = y(y-10) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{10} y\right),$$

de donde

$$c_n = \frac{2}{10}\int_0^{10} y(y-10)\sin\left(\frac{n\pi}{10}y\right) dy = \frac{400}{\pi^3 n^3}((-1)^n - 1).$$

Finalmente, la solución formal es

$$u(t,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{400}{\pi^3 n^3}((-1)^n - 1) e^{\left(1-\left(\frac{n\pi}{10}\right)^2\right)t} \sin\left(\frac{n\pi}{10} y\right)$$

6. **(2 puntos)** Resolver la ecuación en diferencias

$$\begin{cases} y_{n+2} + 2y_{n+1} + y_n = n, \\ y_0 = 0, \ \ y_1 = 1. \end{cases}$$

Solución. Tomamos la transformada Z

$$Z[y_{n+2} + 2y_{n+1} + y_n](z) = Z[n](z)$$

de donde

$$\begin{aligned} (z^2+2z+1)Z[y_n](z) - z &= -z\frac{d}{dz}Z[1](z) \\ &= -z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right) = \frac{z}{(z-1)^2}. \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} Z[y_n](z) &= \frac{z}{(z-1)^2(z+1)^2} + \frac{z}{(z+1)^2} \\ &= \frac{z\,(z^2-2z+2)}{(z-1)^2(z+1)^2}. \end{aligned}$$

Calculamos la transformada Z inversa

$$\begin{aligned} \frac{z\,(z^2-2z+2)}{(z-1)^2(z+1)^2} &= \frac{1/4}{(z-1)^2} + \frac{1}{z+1} - \frac{5/4}{(z+1)^2} \\ &= -\frac{1}{4}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z-1}\right) + \frac{1}{z+1} - \frac{5}{4}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z+1}\right) \\ &= -\frac{1}{4}\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}\right) + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}} - \frac{5}{4}\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}\right) \\ &= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{z^{n+2}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}} - \frac{5}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{z^{n+2}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(1-5(-1)^n)}{4z^{n+2}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n-1)(1-5(-1)^n)}{4z^n} + 1 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z^n} \\ &= 1 + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{(n-1)(1-5(-1)^n)}{4} - (-1)^n\right)\frac{1}{z^n}. \end{aligned}$$

Así, si $n \geq 2$

$$y_n = \frac{(n-1)(1-5(-1)^n)}{4} - (-1)^n.$$

7. **(2 puntos)** Obtener la solución de la ecuación diferencial

$$y^{3)} + 3y'' + 4y' + 2 = t^2$$

para tiempos suficientemente grandes (régimen estacionario).

Solución. Tomamos la transformada de Laplace en la ecuación diferencial

$$(z^3 + 3z^2 + 4z + 2)L[y](z) - y(0)(4 + 3z + z^2) - y'(0)(3 + z) - y''(0) = \frac{2}{z^3},$$

de donde

$$L[y](z) = \frac{y(0)(4 + 3z + z^2) + y'(0)(3 + z) + y''(0)}{z^3 + 3z^2 + 4z + 2} + \frac{1}{z^3 + 3z^2 + 4z + 2}\frac{2}{z^3}.$$

La función de transferencia

$$T(z) = \frac{1}{z^3 + 3z^2 + 4z + 2}$$

tiene polos -1 y $-1 \pm i$. Como tienen parte real negativa, el sistema es asintóticamente estable y por tanto la solución a largo plazo es de la forma

$$\begin{aligned} y(t) &\simeq \operatorname{Re}s\left(\frac{e^{zt}}{z^3 + 3z^2 + 4z + 2}\frac{2}{z^3}, 0\right) \\ &= \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{2e^{zt}}{z^3 + 3z^2 + 4z + 2}\right) = \frac{t^2 - 4t + 5}{2}. \end{aligned}$$