

Matemáticas 2. GIE. 2017/18
Sesión de Problemas 3

1. Dado el sistema

$$\begin{cases} y''' + 5y'' + 11y' + 15y = f(t), \\ y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1, \end{cases}$$

se pide:

- (a) Demostrar que es asintóticamente estable.
- (b) Obtener la solución cuando el tiempo es suficientemente grande (régimen estacionario) cuando $f(t) = 10$.
- (c) Obtener la solución cuando el tiempo es suficientemente grande (régimen estacionario) cuando $f(t) = 10 \sin(4t)$.
- (d) Obtener la solución $y(t)$ cuando $f(t) = h_2(t)$, la función de Heaviside, y calcular $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$.

Solución. (a) Aplicamos la transformada de Laplace y obtenemos

$$(z^3 + 5z^2 + 11z + 15)\mathcal{L}[y](z) - 1 = \mathcal{L}[f](z),$$

de donde

$$\mathcal{L}[y](z) = \frac{1}{z^3 + 5z^2 + 11z + 15} + \frac{\mathcal{L}[f](z)}{z^3 + 5z^2 + 11z + 15}$$

con lo que la función de transferencia es

$$T(z) = \frac{1}{z^3 + 5z^2 + 11z + 15},$$

cuyos polos son -3 , $-1 \pm 2i$, que tienen todos parte real negativa, por lo que el sistema es asintóticamente estable.

(b) En este caso

$$\mathcal{L}[f](z) = \frac{10}{z}$$

y la solución es

$$\begin{aligned} y(t) &\simeq \operatorname{Res} \left(e^{zt} \frac{10}{z} T(z), 0 \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} 10e^{zt} T(z) \\ &= 10T(0) = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

(c) En este caso, tenemos que

$$\begin{aligned} y(t) &\simeq 10|T(4i)| \sin(4t + \arg(T(4i))) \\ &= \frac{2}{\sqrt{185}} \sin \left(4t + \pi - \arctan \frac{4}{13} \right) \end{aligned}$$

ya que

$$\begin{aligned} T(4i) &= -\frac{13}{925} + \frac{4}{925}i, \\ |T(4i)| &= \frac{1}{5\sqrt{185}}, \\ \arg(T(4i)) &= \pi - \arctan \frac{4}{13}. \end{aligned}$$

(d) Finalmente, dado que

$$\mathcal{L}[h_2](z) = \frac{e^{-2z}}{z},$$

se tiene que

$$\mathcal{L}[y](z) = \frac{1}{z^3 + 5z^2 + 11z + 15} + \frac{e^{-2z}}{(z^3 + 5z^2 + 11z + 15)z},$$

por lo que

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{z^3 + 5z^2 + 11z + 15} \right] (t) + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{e^{-2z}}{(z^3 + 5z^2 + 11z + 15)z} \right] (t) \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{z^3 + 5z^2 + 11z + 15} \right] (t) + h_2(t) \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(z^3 + 5z^2 + 11z + 15)z} \right] (t - 2). \end{aligned}$$

Calculamos aparte

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{z^3 + 5z^2 + 11z + 15} \right] (t) &= \text{Res} (e^{zt}T(z), -3) + \text{Res} (e^{zt}T(z), -1 + 2i) + \text{Res} (e^{zt}T(z), -1 - 2i) \\ &= \frac{e^{-2t}}{8} + \frac{e^{-t+2it}}{16}(-1 - i) + \frac{e^{-t-2it}}{16}(-1 + i) \\ &= \frac{e^{-2t}}{8} + e^{-t} \left(-\frac{e^{2it} + e^{-2it}}{16} + \frac{e^{2it} - e^{-2it}}{16i} \right) \\ &= \frac{e^{-2t}}{8} + \frac{e^{-t}}{8} (-\cos(2t) + \sin(2t)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(z^3 + 5z^2 + 11z + 15)z} \right] (t) &= \text{Res} (e^{zt}T(z), -0) + \text{Res} (e^{zt}T(z), -3) \\ &\quad + \text{Res} (e^{zt}T(z), -1 + 2i) + \text{Res} (e^{zt}T(z), -1 - 2i) \\ &= \frac{1}{15} - \frac{e^{-2t}}{24} + \frac{e^{-t+2it}}{80}(-1 + 3i) + \frac{e^{-t-2it}}{80}(-1 - 3i) \\ &= \frac{1}{15} - \frac{e^{-2t}}{24} + e^{-t} \left(-\frac{e^{2it} + e^{-2it}}{80} - 3\frac{e^{2it} - e^{-2it}}{80i} \right) \\ &= \frac{1}{15} - \frac{e^{-2t}}{24} - \frac{e^{-t}}{40} (\cos(2t) + 3\sin(2t)). \end{aligned}$$

Así

$$y(t) = \frac{e^{-2t}}{8} + \frac{e^{-t}}{8} (-\cos(2t) + \sin(2t)) + h_2(t) \left(\frac{1}{15} - \frac{e^{-2t+4}}{24} - \frac{e^{-t+2}}{40} (\cos(2t - 4) + 3\sin(2t - 4)) \right)$$