Matemáticas 2. GIE. 2017/18
Sesión de Problemas 2.

1. Dado $r > 0$ y la curva $\gamma(t) = -1 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, calcular

$$\int_\gamma \frac{1}{z^4 + 3z^3 - 4z} dz$$

Solución. Los polos de la función

$$f(z) = \frac{1}{z^4 + 3z^3 - 4z}$$

son 0, 1 y -2, éste último de orden 2. Distinguimos estonces los siguientes casos:

- $r < 1$. En este caso no hay ninguna singularidad dentro de la curva y por el Teorema de Cauchy tenemos que

$$\int_\gamma \frac{1}{z^4 + 3z^3 - 4z} dz = 0.$$

- $1 < r < 2$. Ahora son 0 y -2 las singularidades dentro de la curva, y por el Teorema de los residuos tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{1}{z^4 + 3z^3 - 4z} dz &= 2\pi i \left(\operatorname{Re} s\,(f, 0) + \operatorname{Re} s\,(f, -2)\right) \\
&= 2\pi i \left(\lim_{z \to 0} \frac{z}{z^4 + 3z^3 - 4z} + \lim_{z \to -2} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} \frac{(z+2)^2}{z^4 + 3z^3 - 4z} \right) \\
&= 2\pi i \left(\lim_{z \to 0} \frac{1}{z^3 + 3z^2 - 4} + \lim_{z \to -2} \frac{1 - 2z}{(z^2 - z)^2} \right) \\
&= -\frac{\pi i}{18}.
\end{aligned}$$

- $r > 2$. Ahora todas las singularidades están en el interior de la curva γ por lo que

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{1}{z^4 + 3z^3 - 4z} dz &= 2\pi i \left(\operatorname{Re} s\,(f, 0) + \operatorname{Re} s\,(f, -2) + \operatorname{Re} s\,(f, 1)\right) \\
&= -\frac{\pi i}{3} + 2\pi i \lim_{z \to 1} \frac{z - 1}{z^4 + 3z^3 - 4z} \\
&= -\frac{\pi i}{3} + 2\pi i \lim_{z \to 1} \frac{1}{z^3 + 4z^2 + 4z} \\
&= -\frac{\pi i}{18} + \frac{2\pi i}{9} = \frac{3\pi i}{18}.
\end{aligned}$$

2. Dada la función
$$f(z) = \frac{1}{1+z^2},$$
calcular el valor de $f^{30)}(1)$.

Solución. En primer lugar descomponemos en fracciones simples
$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{-i/2}{z-i} + \frac{i/2}{z+i}.$$
Calculamos por separado
$$\begin{aligned}\frac{1}{z-i} &= \frac{1}{1-i+z-1} = \frac{1}{1-i}\frac{1}{1-\frac{z-1}{i-1}} \\ &= \frac{1+i}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{i-1}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(1+i)^{n+1}}{2^{n+1}}(z-1)^n\end{aligned}$$
si $|z-1| < \sqrt{2}$, y
$$\begin{aligned}\frac{1}{z+i} &= \frac{1}{1+i+z-1} = \frac{1}{1+i}\frac{1}{1-\left(-\frac{z-1}{1+i}\right)} \\ &= \frac{1-i}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-1}{1+i}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(1-i)^{n+1}}{2^{n+1}}(z-1)^n\end{aligned}$$
si $|z-1| < \sqrt{2}$. Por lo tanto, el radio de convergencia de la serie es $R = \sqrt{2}$ y para el mismo tenemos que
$$\begin{aligned}f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i}{2}\left(\frac{(-1)^n(1-i)^{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{(-1)^n(1+i)^{n+1}}{2^{n+1}}\right)(z-1)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} i\frac{(-1)^n}{2^{n+2}}\left((1-i)^{n+1} - (1+i)^{n+1}\right)(z-1)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} i\frac{(-1)^n}{2^{n+2}}2\left(\sqrt{2}\right)^{n+1} i\sin\left(\frac{(n+1)\pi}{4}\right)(z-1)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}}\sin\left(\frac{(n+1)\pi}{4}\right)(z-1)^n,\end{aligned}$$
teniendo en cuenta que
$$\begin{aligned}(1+i)^n &= \left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right) \\ (1-i)^n &= \left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right).\end{aligned}$$
Por lo tanto, por el Teorema de Taylor tenemos que
$$f^{30)}(1) = 30!\frac{(-1)^{31}}{\left(\sqrt{2}\right)^{31}}\sin\left(\frac{31\pi}{4}\right) = -\frac{30!}{2^{15}}\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{30!\sqrt{2}}{2^{16}}.$$