Matemáticas 2. GIE. 2017/18
Sesión de Problemas 1.

1. Calcular y expresar en forma binómica

$$\frac{2+i}{4-3i}$$

$$\sqrt[5]{2-2i}$$

Solución. Para el primero multiplicamos y dividimos por el conjugado

$$\frac{2+i}{4-3i} = \frac{(2+i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} = \frac{5+10i}{25} = \frac{1}{5} + i\frac{2}{5}.$$

Para el segundo, tenemos en cuenta que $2-2i \simeq \sqrt{8}_{\frac{7\pi}{4}}$ y aplicamos la fórmula para obtener las cinco raíces

$$r_1 = \sqrt[5]{\sqrt{8}}_{\frac{\frac{7\pi}{4}}{5}} = \sqrt[10]{8}_{\frac{7\pi}{20}} \simeq \sqrt[10]{8}\left(\cos\frac{7\pi}{20} + i\sin\frac{7\pi}{20}\right).$$

$$r_2 = \sqrt[5]{\sqrt{8}}_{\frac{\frac{7\pi}{4}+2\pi}{5}} = \sqrt[10]{8}_{\frac{15\pi}{20}} \simeq \sqrt[10]{8}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

$$r_3 = \sqrt[5]{\sqrt{8}}_{\frac{\frac{7\pi}{4}+4\pi}{5}} = \sqrt[10]{8}_{\frac{23\pi}{20}} \simeq \sqrt[10]{8}\left(\cos\frac{23\pi}{20} + i\sin\frac{23\pi}{20}\right).$$

$$r_4 = \sqrt[5]{\sqrt{8}}_{\frac{\frac{7\pi}{4}+6\pi}{5}} = \sqrt[10]{8}_{\frac{31\pi}{20}} \simeq \sqrt[10]{8}\left(\cos\frac{31\pi}{20} + i\sin\frac{31\pi}{20}\right).$$

$$r_5 = \sqrt[5]{\sqrt{8}}_{\frac{\frac{7\pi}{4}+8\pi}{5}} = \sqrt[10]{8}_{\frac{39\pi}{20}} \simeq \sqrt[10]{8}\left(\cos\frac{39\pi}{20} + i\sin\frac{39\pi}{20}\right).$$

2. Estudiar cuándo es derivable la función $f(z) = z \cdot \overline{z}$

Solución. Tomando $z = x + iy$ obtenemos

$$f(x+iy) = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2,$$

con lo que la parte real $f_1(x,y) = x^2 + y^2$ y la parte imaginaria $f_2(x,y) = 0$. Aplicamos las condiciones de Cauchy–Riemann

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} &= 2x = \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} &= 2y = -\frac{\partial f_2}{\partial x} = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, es derivable cuando $x = y = 0$.