Matemáticas 2. GIE. 2017/18
Evaluación Inicial

1. Resolver la ecuación
$$x^4 - 5x^2 + 6 = 0.$$

Solución. Con el cambio de variable $y = x^2$ escribimos la ecuación como
$$y^2 - 5y + 6 = 0,$$
cuya solución es
$$y = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = 3 \ y \ 2.$$
Si $y = 3$, tenemos que
$$x = \pm\sqrt{3}$$
y si $y = 2$ se obtiene
$$x = \pm\sqrt{2}.$$

2. Resolver la ecuación
$$\sin(x + \pi) = \cos^2 x.$$

Solución. Desarrollamos la ecuación como
$$\sin x \cos \pi + \cos x \sin \pi = \cos^2 x,$$
$$-\sin x = 1 - \sin^2 x,$$
$$\sin^2 x - \sin x - 1 = 0,$$
de donde
$$\sin x = \frac{1 \pm \sqrt{4}}{2}.$$
Dado que $\frac{1+\sqrt{4}}{2} > 1$, no existe x que verifique que $\sin x = \frac{1+\sqrt{4}}{2}$. Por otra parte
$$x = \arcsin \frac{1-\sqrt{4}}{2}.$$

3. Calcular
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}.$$

Solución. Aplicamos la regla de L'hopital dos veces para obtener
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x \sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin^2 x + \cos^2 x}{1} = 1.$$

4. Calcular
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2 + y^2}.$$

Solución. Hacemos $y = mx$, con $m \neq 0$, y calculamos
$$\lim_{x\to=} \frac{2mx^2}{x^2(1 + m^2)} = \frac{2m}{1 + m^2}.$$
Como este límite depende de m, no existe el límite pedido al no ser único.

5. Dado $f(x,y) = e^{x^2/y^2}(x+y^2)$ calcular

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Solución. Calculamos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x^2/y^2}\frac{2x}{y^2}(x+y^2) + e^{x^2/y^2}y^2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -e^{x^2/y^2}\frac{2x^2}{y^3}(x+y^2) + e^{x^2/y^2}2y.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} &= e^{x^2/y^2}\frac{2x}{y^2}(x+y^2) + e^{x^2/y^2}y^2 - e^{x^2/y^2}\frac{2x^2}{y^3}(x+y^2) + e^{x^2/y^2}2y \\
&= e^{x^2/y^2}\left(\frac{2x^2}{y^2} + 2x + y^2 - \frac{2x^3}{y^3} - \frac{2x^2}{y} + 2y\right) \\
&= e^{x^2/y^2}\left(\frac{2x^2y + 2xy^3 + y^5 - 2x^3 - 2x^2y^2 + 2y^4}{y^3}\right).
\end{aligned}$$

6. Resolver el problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = \cos x \\ y(0) = y'(0) = 1. \end{cases}$$

Solución. Consideramos la ecuación homogénea $y'' + 2y' + y = 0$, con ecuación característica $x^2 + 2x + 1 = 0$, cuya solución es $x = -1$, con multiplicidad 2. Por lo tanto, la solución general de la ecuación homogénea es

$$y_h(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}.$$

Buscamos ahora una solución particular de la ecuación no homogénea de la forma

$$y_p(x) = A\cos x + B\sin x.$$

Sustituimos en la ecuación no homogénea obteniendo

$$-A\cos x - B\sin x - 2A\sin x + 2B\cos x + A\cos x + B\sin x = \cos x,$$

$$-2A\sin x + 2B\cos x = \cos x,$$

de donde

$$\begin{cases} -2A = 0, \\ 2B = 1, \end{cases}$$

por lo que $A = 0$ y B=1/2y la solución particular es

$$y_p(x) = \frac{1}{2}\cos x,$$

y la solución general

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + \frac{1}{2}\cos x,$$

con derivada

$$y'(x) = (c_2 - c_1)e^{-x} - c_2 x e^{-x} - \frac{1}{2}\sin x.$$

Particularizamos en $x = 0$ obteniendo

$$\begin{cases} y(0) = 1 = c_1 + \frac{1}{2}, \\ y'(0) = 1 = c_2 - c_1, \end{cases}$$

por lo que $c_1 = 1/2$ y $c_2 = 3/2$ y la solución es

$$y(x) = \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{3}{2}xe^{-x} + \frac{1}{2}\cos x.$$