Prácticas de Variable Compleja con Maxima.

Jose Salvador Cánovas Peña.
Departamento de Matemática Aplicada.

Contents

¿Qué es Maxima?

Maxima es un programa que permite hacer cálculos matemáticos complicados con gran rapidez. Para entendernos, es como una especie de calculadora gigante a la que no sólo podemos pedirle que haga cálculos numéricos, sino que también hace derivadas, cálculo de primitivas, representación gráfica de curvas y superficies, factorización de polinomios etc.

Abordamos en esta práctica una iniciación a Maxima partiendo desde cero, e intentaremos poner de manifiesto su utilidad a la hora de trabajar con expresiones matemáticas complicadas, permitiendo hacer éstas con poco coste de tiempo.

Será necesaria por parte del alumno una lectura previa de esta práctica antes de empezar a trabajar con el programa. Esta lectura previa tiene por objeto el conocimiento de ciertas sentencias clave que permiten el manejo del programa. Al igual que al aprender el manejo de una calculadora científica es necesario leer las instruciones de la misma, estas notas pueden ser útiles para aprender el manejo de Maxima.

Por otra parte, a pesar de la potencia evidente del programa, hemos de hacer notar que es necesario por parte del alumno un conocimiento matemático teórico de todas las funciones y sentencias que vamos a usar. Por ejemplo, aunque una calculadora multiplica números con suma facilidad, sólo nos percatamos de su potencia en cuanto conocemos dicha operación y somos capaces de realizarla de un modo mucho más lento. Con Maxima ocurre lo mismo. Sólo conociendo teóricamente las operaciones que Maxima realiza nos percataremos de su indudable utilidad.

Chapter 1

Preliminares

Cuando se arranca Maxima, aparece una pantalla blanca vacía. En ella podemos escribir aquellas operaciones que queremos que realice. Una vez tecleada la operación, hemos de pulsar las teclas *shift + enter* para obtener el resultado. Por ejemplo, supongamos que queremos hacer la operación 2+2. Teclearemos entonces

$$2+2$$

en la pantalla. A continuación pulsamos *shift + enter* y aparecerá lo siguiente en pantalla:

$$\begin{array}{ll} (\%i1) & 2+2; \\ (\%o1) & 4 \end{array}$$

siendo %i1 la entrada uno, proporcionando la salida %o1.

Además se pueden realizar las siguiente operaciones algebraicas:

$$\begin{array}{rcl} x+y & \rightarrow & suma \\ x-y & \rightarrow & resta \\ x/y & \rightarrow & división \\ x*y & \rightarrow & producto \\ x\hat{\ }y & \rightarrow & potencia. \end{array}$$

Actividad 1 *Realizar las siguientes operaciones con Maxima:*

(a) $3.75+8.987=$

(b) $(2-3.1)^{23} =$

(c) $\frac{2.4+3^2}{4*7.2^2} =$

(d) $2 \times 10^2 + 3 \times 10^{-3} =$

(e) $\left(\frac{2.3*4}{2-4.5^2}\right)^{56} =$

A la hora de trabajar con Maxima, hemos de tener en cuenta que hay dos modalidades admisibles. Tomemos por ejemplo la operacion

$$2 \times 10^2 + 3 \times 10^{-3}.$$

Si introducimos la sentencia

$$2 * 10^2 + 3 * 10^{-3}$$

obtendremos al ejecutarla

$$(\%i1)\quad 2 * 10^2 + 3 * 10^{-3};$$
$$(\%o1)\quad \frac{200003}{1000}$$

mientras que si escribimos

$$2.0 * 10^2 + 3 * 10^{-3}$$

obtendremos

$$(\%i2)\quad 2.0 * 10^2 + 3 * 10^{-3};$$
$$(\%o2)\quad 200.003$$

Como vemos, en la primera obtenemos una fracción, mientras en la segunda obtenemos un número decimal. Pero las diferencias van más allá de esta apariencia: en la primera el programa ha trabajado con precisión infinita y el resultado que presenta es exacto. En la segunda se ha trabajado (el programa lo hará automáticamente al detectar un número decimal, 2.0 en este caso) con precición finita y por lo tanto con errores de redondeo. Estos errores no afectan a esta operación, pero sí lo hacen a la operación

(1/10)^4,

que en precisión infinita se obtiene

$$(\%i1)\quad (1/10)\hat{}4;$$
$$(\%o1)\quad \frac{1}{10000}$$

mientras que en finita tenemos

$$(\%i2)\quad (1.0/10)\hat{}4;$$
$$(\%o2)\quad 1.0000000000000005\ 10^{-4}$$

La función **float** se puede utilizar para convertir un número en decimal de doble precisión, que es la que por defecto utiliza el programa. Así por ejemplo

$$(\%i3)\quad \text{float}((1/10)\hat{}4);$$
$$(\%o3)\quad 1.0\ \ 10^{-4}$$

Igualmente la operación

$$(\%i4)\ 2\hat{}100;$$
$$(\%o4)\ 1267650600228229401496703205376$$

pero si escribimos

$$(\%i5)\ \text{float}(2\hat{}100);$$
$$(\%o5)\ 1.2676506002282294\ 10^{30}$$

Los números de la forma 3.05×10^{-3} en coma flotante pueden expresarse escribiendo el exponente como "f", "d" o "e". Por ejemplo

$$3.05 \times 10^{-3},\ 3.05e^{-3},\ 3.05d^{-3},\ 3.05f^{-3}$$

Para saber si el programa está trabajando en precisión finita o infinita tenemos la sentencia **numer**. Esta sentencia, si la ejecutamos nos devuelve el valor por defecto **false**, lo que significa que el programa está trabajando en precisión infinita. Si introducimos

$$(\%i6)\ \text{numer:true};$$
$$(\%o6)\ true$$

pasamos a trabajar con precisión finita. Para activar la precisión infinita debemos teclear

$$(\%i7)\ \text{numer:false};$$
$$(\%o7)\ false$$

1.1 Sobre las constantes

Las principales constantes matemáticas elementales se teclean en Maxima del siguiente modo

$$\begin{aligned}
\%e- &> e \approx 2.718281828459045d0 \\
\%i- &> \sqrt{-1} \\
ind\ o\ und- &> \text{Representa un valor indeterminado} \\
\inf - &> +\infty \\
\min f- &> -\infty \\
\inf inity- &> \infty \text{ complejo (polo norte de la esfera de Reimann)} \\
\%phi- &> \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ (razón aúrea)} \\
\%pi- &> \pi \approx 3.141592653589793d0
\end{aligned}$$

Aparte de estas constantes, pueden declarar otras que se puedan necesitar en un momento dado. Por ejemplo, si queremos asignar la constante de la gravitación universal $G = 6.67 \times 10^{-11}$ debemos teclear

$$(\%i1)\ G : 6.67 \times e - 11;$$
$$(\%o1)\ 6.67\ 10^{-11}$$

Nótese que usamos : en vez del símbolo de igualdad =. Si tecleamos G y pulsamos shift +enter obtendremos en pantalla

$$(\%i2)\ G;$$
$$(\%o2)\ 6.67\ 10^{-11}$$

Maxima distingue entre mayúsculas y minúsculas por lo que si escribimos g, esta no es igual a G. Para eliminar el valor asignado a G tenemos la función **kill**. Tecleando

$$(\%i3)\ kill(G);$$
$$(\%o3)\ done$$

desposeemos a G de su valor. Si tecleamos como antes obtenemos en pantalla

$$(\%i4)\ G;$$
$$(\%o4)\ G$$

dado que hemos borrado la variable de entre las definidas.

Por otra parte, si en una misma línea queremos definir varias variables, o escribir varias expresiones debemos separar estas con ";". Por ejemplo

$$(\%i5)\ x : 1; y : 2; z : x + y$$
$$(\%o5)\ 1$$
$$(\%o6)\ 2$$
$$(\%o7)\ 3$$

que como vemos proporciona 3 salidas. Si queremos borrar todos estas variables declearemos

$$(\%i8)\ kill(all);$$
$$(\%o8)\ done$$

Si no deseamos escribir la variable en una salida basta escribir un "$" al final. Por ejemplo

$$(\%i1)\ x : 1; y : 2; z : x + y\$$$
$$(\%o1)\ 1$$
$$(\%o2)\ 2$$

y no proporciona la tercera salida de la variable z como anteriormente ocurría.

1.2 Sobre las funciones

Una primera apreciación sobre las funciones en maxima es que estas van definidas en minúsculas con los argumentos entre paréntesis. Las nociones matemáticas más notables las presentamos en la siguiente tabla:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{sqrt}(x) &= \sqrt{x} \\
\exp(x) &= e^x \\
\log(x) &= \log x \\
\sin(x) &= \sin x \\
\cos(x) &= \cos x \\
\tan(x) &= \tan x \\
\mathrm{asin}(x) &= \arcsin x \\
\mathrm{acos}(x) &= \arccos x \\
\mathrm{atan}(x) &= \arctan x \\
n! &= factorial\ de\ n \\
\mathrm{abs}(x) &= |x| \\
\mathrm{entier}(x) &= parte\ entera\ de\ x
\end{aligned}
$$

Así, si escribimos

(%i1) sqrt(16);
(%o1) 4
(%i2) Sqrt(2);
(%o2) $\sqrt{2}$
(%i3) float(sqrt(2));
(%o3) 1.414213562373095

Actividad 2 *Calcular los siguientes valores:*

(a) $\sin \pi/4 + \cos \pi/7 =$

(b) $\log_2 256 =$

(c) $\left|\arcsin 0.98 + \frac{\log 2}{\sqrt{2}}\right| =$

(d) $e^{10!} =$

(e) $\sqrt{\log 34 + e^{12}} =$

Aparte de las funciones que Maxima tenga integradas, podemos introducir nuevas funciones. Por ejemplo, para definir la función $f(x,y)) = xy$ escribimos

$$
\begin{aligned}
(\%i1)\ f(x,y) &: \ = x * y; \\
(\%o1)\ f(x,y) &: \ = x\ y
\end{aligned}
$$

con lo que la función estará introducida. Si ahora tecleamos

$$
\begin{aligned}
&(\%i2)\ f(2,3); \\
&(\%o2)\ 6
\end{aligned}
$$

Las funciones también pueden definirse de una forma más cómoda con la expresión

1.3 Aprovechando cálculos anteriores

A veces, es posible que tengamos que hacer una sucesión de cálculos consecutivos de manera que cada nueva operación se basa en la anterior. Parece necesaria entonces algo que nos remita a resultados anteriores. Esto se realiza con maxima simplemente llamando a la entrada o salida correspondiente anteponiendo siempre el símbolo %. Por ejemplo, si queremos calcular $\cos(\sin\pi/7)$ tendríamos que calcular primero $\sin\pi/7$, para despues calcular el coseno de dicha cantidad. Esta operación podríamos hacerla del modo siguiente:

$$
\begin{aligned}
&(\%i1)\ \text{sin}(\%pi/7); \\
&(\%o1)\ \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \\
&(\%i2)\ \text{cos}(\%o1) \\
&(\%o2)\ \cos\left(\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right) \\
&(\%i3)\ \text{float}(\%o2) \\
&(\%o3)\ 0.90733988115078
\end{aligned}
$$

Obviamente, este ejemplo es bastante sencillo ya que la operación en cuestión podría haberse hecho en una sola línea de comandos, pero ilustra bien el modo de proceder cuando se estén realizando operaciones y cálculos más complejos.

Finalmente, para llamar a la salida anterior basta usar el símolo %. Así, la operación anterior podría haberse escrito como

$$(\%i1)\ \sin(\%pi/7);$$
$$(\%o1)\ \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$$
$$(\%i2)\ \cos(\%)$$
$$(\%o2)\ \cos\left(\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)$$
$$(\%i3)\ \text{float}(\%)$$
$$(\%o3)\ 0.90733988115078$$

1.4 Resolución de ecuaciones

Supongamos que queremos resolver la ecuación polinómica $x^2 + 2x - 4 = 0$. El comando para resolverlas en Maxima es **solve**, de forma que para resolver la ecuación anterior escribiremos

$$(\%i1)\ \text{solve}(x\hat{\ }2 + 2 * x - 4 = 0, x);$$
$$(\%o1)\ [x = -\sqrt{5} - 1, x = \sqrt{5} - 1]$$

Si lo que buscamos son soluciones numéricas aproximadas, tanto reales como complejas, tenemos la sentencia **allroots**, de forma que al teclear

$$(\%i2)\ \text{allroots}(x\hat{\ }2 + 2 * x - 4 = 0, x);$$
$$(\%o2)\ [x = 1.23606797749979, x = -3.23606797749979]$$

obtenemos las soluciones aproximadas.

La sentencia solve puede usarse para resolver sistemas de ecuaciones polinómicas, introduciéndolas en una lista junto con otra lista para las incógnitas. Por ejemplo, el sistema

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ xy + y\hat{\ }2 = 5 \end{cases}$$

se resolvería de forma exacta tecleando

$$(\%i3)\ solve([x + y = 1, x * y + y\hat{\ }2 = 5], [x, y]);$$
$$(\%o3)\ [[x = -4, y = 5]]$$

Alternativamente, puede usarse la sentencia **algsys**, con sintaxis

$$\text{algys}([eq_1,\ldots,eq_n],[x_1,\ldots,x_n])$$

resuelve las ecuaciones polinómicas $eq_1,\ldots,eq_n$. Por ejemplo, tecleando

$$(\%i1)\ eq1 : x\hat{}2 - y\hat{}2 = 0;$$

$$(\%i2)\ eq1 : -1 - y + 2 * y\hat{}2 - x + x\hat{}2 = 0\$$$

$$(\%i3)\ \text{algsys([eq1,eq2],[x,y])}$$

produce la salida

$$(\%o4)[[x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, y = \frac{1}{\sqrt{3}}], [x = \frac{1}{\sqrt{3}}, y = -\frac{1}{\sqrt{3}}], [x = -\frac{1}{3}, y = -\frac{1}{3}], [x = 1, y = 1]]$$

Actividad 3 *Calcular las raíces de los siguientes polinomios, dando el resultado exacto si lo hubiere, y un resultado aproximado.*

(a) $x^3 + 3x^2 - x - 1$.

(b) $x^{10} - 1$.

(c) $5x^4 - x^2 + x - 1$.

(d) $x^5 - x^3 + 1$.

Chapter 2

El cuerpo de los números complejos

2.1 Nociones básicas

Los números complejos se introducen teniendo en cuenta que la unidad imaginaria i se escribe %i. Así, el número complejo $2+3i$ se escribe $2+3*\%i$. Las operaciones con números complejos son análogas a las de con números reales, disponiendose además de las siguientes funciones propias de la naturaleza de los complejos:

- realpart -> Parte real del número complejo.
- imagpart -> Parte imaginaria del número complejo.
- rectform -> Devuelve la expresión binómica del número complejo.
- polarform -> Devuelve la expresión polar, en forma exponencial, del número complejo.
- cabs -> Devuelve el módulo del número complejo.
- carg -> Devuelve el argumento del número complejo.
- conjugate -> Devuelve el conjugado del número complejo.

No obstante, maxima no ejecuta multiplicaciones y divisiones si no las introducimos dentro de la sentencia **expand**, que se utiliza para desarrollar ciertas operaciones. Por ejemplo

$$(\%i1)\ (2+\%i)*(2-\%i);$$
$$(\%o1)\ (2+\%i)*(2-\%i)$$

mientras que

$$(\%i1)\ \mathrm{expand}((2+\%i)*(2-\%i));$$
$$(\%o1)\ 5$$

Por otra parte, a veces al realizar alguna operación se pone en primer lugar la parte imaginaria y después la real. Por ejemplo

$$(\%i1)\ \mathrm{expand}((3+2*\%i)*(2-\%i));$$
$$(\%o1)\ \%i+8$$

La sentencia **powerdisp** es util para poner los número complejos en su forma habitual. Está sentencia tiene dos valores: false (por defecto) y true. Para cambiar el valor se teclea

$$(\%i2)\ \mathrm{powerdisp{:}true}\$$$

y ahora, al teclear tenemos que

$$(\%i3)\ \mathrm{expand}((3+2*\%i)*(2-\%i));$$
$$(\%o3)\ 8+\%i$$

Basta teclear

$$(\%i4)\ \mathrm{powerdisp{:}false}\$$$

para volver dicha sentencia a su valor original.

Al trabajar con fracciones, nótese que la sentencia expand no proporciona en general la forma binómica del número complejo. Por ejemplo

$$(\%i1)\ \mathrm{expand}((4*\%i-5)/(3+\%i))$$
$$(\%o1)\ -\frac{5}{3+\%i}+\frac{4\%i}{3+\%i}$$

mientras que tecleando

$$(\%i2)\ \mathrm{rectform}((4*\%i-5)/(3+\%i))$$
$$(\%o1)\ -\frac{11}{10}+\frac{17\%i}{10}$$

Actividad 4 *Realizar las siguientes operaciones con Maxima:*

(a) $(3+4i)\cdot(8+i) =$

(b) $(3+4i)/(8+i) =$

(c) $(3+4i)\cdot(8+i) - i =$

(d) *Obtener los módulos, argumentos, formas polar y rectangular, conjugados y partes real e imaginaria de los números obtenidos en las operaciones (a)–(c) anteriores.*

2.2 Potencias y raíces

Las sentencias expand y rectform son necesarias para obtener potencias enteras de números complejos. Por ejemplo

$$(\%i1)\ \mathrm{rectform}((2+\%i)\hat{}-2);$$
$$(\%o1)\ \frac{3}{25}-\frac{4\%i}{25}$$

y

$$(\%i1)\ \mathrm{expand}((2+\%i)\hat{}2);$$
$$(\%o1)\ 3+4\%i$$

A la hora de obtener las raíces complejas de un número complejo, el programa únicamente va a proporcionar la primera de ellas. Las restantes habrá que obtenerlas aparte, teniendo en cuenta que todas tendrán el mismo módulo diferenciandose en sus argumentos. Por ejemplo

$$(\%i1)\ \mathrm{polarform}((1+\%i)\hat{}(1/2));$$
$$(\%o1)\ 2^{1/4}\%e^{\frac{\%i\pi}{8}}$$

proporciona la primera raíz. El argumento de la segunda se calcula utilizando la formula de cáculo de reíces ya que $2\times\pi/8$ será el argumento de $1+i$, y aplicando la frómula tenemos

$$\frac{\pi/4+2\pi}{2}=\frac{9\pi}{8},$$

por lo que la segunda raíz será

$$2^{1/4}e^{\frac{i9\pi}{8}}.$$

Actividad 5 *Expresar los siguientes números complejos en forma binómica:*

(a) $(1+i)^3$	(c) $\frac{2+3i}{3-4i}$	(e) i^5+i^{16}	(g) $1+i+i^2+i^3$
(b) $\frac{1}{i}$	(d) $(1+i\sqrt{3})^3$	(f) $2_{\pi/2}$	(h) $1_{\pi/4}$

Actividad 6 *Escribir en forma algebráica los complejos siguientes, donde ρ denota el módulo y θ un argumento*

a) $\rho = 2, \theta = \pi$	b) $\rho = 1, \theta = -\pi/4$
c) $\rho = \sqrt{2}, \theta = \pi/3$	d) $\rho = 2, \theta = -\pi/2$

Actividad 7 *Calcular las siguientes raíces:*

(a) $\sqrt[3]{1}$	(c) $\sqrt[3]{i}$	(e) $\sqrt[6]{-8}$	(g) $\sqrt[4]{-1}$
(b) $\sqrt[8]{1}$	(d) $\sqrt{1-i}$	(f) $\sqrt{3+4i}$	(h) $\sqrt[3]{-2+2i}$

Actividad 8 *Calcular el módulo y el argumento de los siguientes números complejos:*

(a) $3+4i$ (b) $\frac{1+i}{1-i}$ (c) i^7+i^{10} (f) $1+i+i^2$

Actividad 9 *Calcular el módulo y el argumento principal de los siguientes números complejos:*

(a) $2i$	(c) $-3i$	(e) -1	(g) $\sqrt[4]{-1}$
(b) 3	(d) $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$	(f) $-3+i\sqrt{3}$	(h) $\sqrt[3]{-2+2i}$

Actividad 10 *Calcula de forma polar los siguientes números complejos:*

$$2i,\ -3i,\ i,\ 3,\ -3+3i,\ \frac{1+i}{1-i},$$

Actividad 11 *Resuelve las siguientes ecuaciones (calcula la raíces que salen):*

$$z^3-1=0, \quad z^4-16=0, \quad z^5-32=0.$$

2.3 Funciones de Variable Compleja

En general podemos utilizar las funciones definidas en Maxima y trabajar con ellas en variable compleja. Por ejemplo, si escribimos

$$(\%i1)\ \text{rectform}(\exp(1-\%i));$$
$$(\%o1)\ \%e\cos(1)-\%e\%i\sin(1)$$

Tenemos que tener precaución con la función logaritmo ya que ésta se expresa con los argumentos en el intervalo $(-\pi,\pi]$, lo que se conoce como el logartimo principal. Así

$$(\%i2)\ \text{rectform}(\log(1-\%i));$$
$$(\%o2)\ \frac{\log(2)}{2}-\frac{\%i\pi}{4}$$

Además, al trabajar con senos y cosenos podemos expresarlos notación exponencial usando la sentencia

$$\text{exponentialize}()$$

y en forma trigonométrica utilizando la sentencia

$$\text{demoivre}().$$

Por ejemplo

$$(\%i3)\ \text{exponentialize}(\cos(1-\%i));$$
$$(\%o3)\ \frac{\%e^{(\%i-1)\%i}+\%e^{-(\%i-1)\%i}}{2}$$

Utilizando las funciones anteriores podemos trabajar con funciones de variable compleja. A modo de ejemplo, vamos a ver que la función $f(z)=ze^z$ es derivable. En primer lugar definimos la función

$$(\%i1)\ f(z)\ :\ =z*\exp(z);$$
$$(\%o1)\ f(z)\ :\ =z\ \exp(z)$$

Posteriormente calculamos su parte real e imaginaria

$$(\%i2)\ f1(x,y)\ :\ =\text{realpart}(f(x+\%i*y));$$
$$(\%o2)\ f1(x,y)\ :\ =\text{realpart}(f(x+\%i\ y))$$

$$(\%i3)\ f2(x,y) \quad : \quad = \text{imagpart}(f(x+\%i*y));$$
$$(\%o3)\ f2(x,y) \quad : \quad = \text{imagpart}(f(x+\%i\ y));$$

que para mostrarlas debemos teclear

$$(\%i4)\ f1(x,y);$$
$$(\%o4)\ x\ \%e\hat{}x\ \cos(y) - \%e\hat{}x\ y\ \sin(y)$$

$$(\%i5)\ f2(x,y);$$
$$(\%o5)\ x\ \%e\hat{}x\ \sin(y) + \%e\hat{}x\ y\ \cos(y)$$

Derivamos

$$(\%i6)\ d1 : \text{diff}(f1(x,y),x);$$
$$(\%o6)\ -\%e\hat{}x\ y\ \sin(y) + x\ \%e\hat{}x\ \cos(y) + \%e\hat{}x\ \cos(y)$$

$$(\%i7)\ d2 : \text{diff}(f1(x,y),y);$$
$$(\%o7)\ --x\ \%e\hat{}x\ \sin(y) - \%e\hat{}x\ \sin(y) - \%e\hat{}x\ y\ \cos(y)$$

$$(\%i8)\ d3 : \text{diff}(f2(x,y),x);$$
$$(\%o8)\ -x\ \%e\hat{}x\ \sin(y) + \%e\hat{}x\ \sin(y) + \%e\hat{}x\ y\ \cos(y)$$

$$(\%i9)\ d4 : \text{diff}(f2(x,y),y);$$
$$(\%o9)\ --\%e\hat{}x\ y\ \sin(y) + x\ \%e\hat{}x\ \cos(y) + \%e\hat{}x\ \cos(y)$$

y para ver que se cumple la condicíón de Cauchy–Riemann calculamos

$$(\%i10)\ d1 - d4;$$
$$(\%o10)\ 0$$

$$(\%i11)\ d2 + d3;$$
$$(\%o11)\ 0$$

Actividad 12 *Estudia si las siguientes funciones definidas en $\mathbb{C}$ son derivables y en caso afirmativo calcular $f'(z)$*

(a) $f(z) = \overline{z} \cdot Imz$ (b) $f(z) = z \cdot Imz$ (c) $f(x+iy) = e^{-y}e^{ix}$

(d) $f(z) = z \cdot \overline{z}$ (e) $f(z) = (z^2 - 2)e^{-z}$ (f) $f(x+iy) = e^{y}e^{ix}$

(g) $f(z) = (z^2 + \cos z)e^{z}$ (h) $f(z) = sen2z + i$ (i) $f(x+iy) = xy + iy$

A modo de otro ejemplo, vamos a calcular una armónica conjugada de una función $f(z)$

$$u(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(y^2 + x^2)^2}$$

Introducimos la función en Maxima

$$(\%i1)\ u\ :\ x/(x\hat{}2 + y\hat{}2);$$
$$(\%o1)\ \frac{x}{y^2 + x^2}$$

vemos que es armónica

$$(\%i2)\ \text{uxx} : diff(u, x, 2);$$
$$(\%o2)\ \frac{8x^3}{(y^2 + x^2)^3} - \frac{6x}{(y^2 + x^2)^2}$$

$$(\%i3)\ \text{uyy} : diff(u, y, 2);$$
$$(\%o3)\ \frac{8xy^2}{(y^2 + x^2)^3} - \frac{2x}{(y^2 + x^2)^2}$$

$$(\%i4)\ d : uxx + uyy;$$
$$(\%o4)\ -\frac{8x}{(y^2 + x^2)^2} + \frac{8xy^2}{(y^2 + x^2)^3} + \frac{8x^3}{(y^2 + x^2)^3}$$

Como vemos esta expresión hemos de simplificarla. Para ello utilizamos el compando multthru para sumarlos con denominador común, en este caso $(x^2 + y^2)^3$

$$(\%i5)\ d1 : \text{multthru}((x\hat{}2 + y\hat{}2)\hat{}3, d);$$
$$(\%o5)\ -8x(y^2 + x^2) + 8xy^2 + 8x^3$$

donde en la salida sólo se nos muestra el numerados. En una segunda etapa simplificamos con el comando ratexpand

$$(\%i6)\ \text{ratexpand}(d1);$$
$$(\%o6)\ \ --0$$

Así, vemos que la función es armónica. A continuación, calculamos su derivadas

$$(\%i6)\ ux : diff(u,x);$$
$$(\%o6)\ 1/(y\hat{}2 + x\hat{}2) - (2 * x\hat{}2)/(y\hat{}2 + x\hat{}2)\hat{}2$$

$$(\%i6)\ \text{uy} : diff(u,y);$$
$$(\%o6)\ \ -(2 * x * y)/(y\hat{}2 + x\hat{}2)\hat{}2$$

y la armónica conjugada $v(x, y)$ cumple que

$$(\%i7)\ v : -integrate(uy, x);$$
$$(\%o7)\ \ -\frac{y}{y^2 + x^2}$$

con lo que será de la forma

$$v(x,y) = \frac{y}{y^2 + x^2} + k(y). \tag{2.1}$$

Derivando respecto de y y utilizando la otra condición de Cauchy–Riemann tenemos que

$$k'(y) = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}$$

y

$$k(y) = \int \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy + c.$$

Veamos como hacer esta operación con Maxima.

$$(\%i8)\ vy : diff(v,y);$$
$$(\%o8)\ \frac{2y^2}{(y^2 + x^2)^2} - \frac{1}{y^2 + x^2}$$

(%i9) d : multthru($(x\hat{\ }2 + y\hat{\ }2)\hat{\ }2, ux - vy$);
(%o9) $2(y^2 + x^2) - 2y^2 - 2x^2$

(%i10) ratexpand(d);
(%o10) 0.

Así, $k'(y) = 0$ y podemos tomar $c = 0$. Si no hubiera salido 0, tendríamos que integrar está función respecto de y y sumarla en la expresión (2.1). No tendríamos que olvidarnos del denominador.

Actividad 13 *Estudia si son armónicas las funciones*

$$(a)\ f(x, y) = \log(x^2 + y^2) \qquad (b)\ f(x, y) = 2e^x \cos y$$

y en caso afirmativo encuentra su conjugada.

Actividad 14 *Reconstruye la función derivable $f(z)$ a partir la condición $f(i) = 2i - 1$ y la parte real $Ref(x + iy) = x^2 - y^2 + 2x$.*

Chapter 3

Integración compleja

3.1 Representación de curvas

Dentro de las gráficas unidimensionales, tenemos que distinguir entre las gráficas de funciones reales de variable real, y las gráficas de curvas en dos y tres dimensiones.

Para representar funciones reales de variable real, tenemos el comando **plot2d**, al que habrá que introducirle la función que deseamos representar así como la variable independiente y el dominio de ésta de forma [var,liminf,limsup]. Así, para representar la función $f(x) = \sin x$ en el dominio $[0, 2\pi]$ escribimos

$$(\%i1) \text{ plot2d}(\sin(x), [x, 0, 2 * \%pi]);$$
$$(\%o1)$$

Al ejecutarlo nos saldrá una nueva ventana con la gráfica en cuestión, pues se utiliza un programa externo a maxima llamado Gnuplot. Esta gráfica podemos guardarla en extensión "emf".

Es preciso hacer aquí un aclaración porque en general todos los comandos gráficos también prueden escribirse añadiendo las letras “wx". Por ejemplo, si tecleamos

$$\text{wxplot2d}(\sin(x), [x, 0, 2 * \%pi])$$

obtenemos la misma gráfica en la pantalla en la que estamos trabajando. No obstante, estas gráficas no se pueden modificar, mientras que si llamamos al programa Gnuplot, es decir, sin escribir wx delante sí es posible realizar cambios en la gráfica que hemos generado.

Si queremos representar varias funciones a la vez, hemos de escribir

$$(\%i2)\ \text{plot2d}([\sin(x), \sin(2*x)], [x, 0, 2*\%pi]);$$
$$(\%o2)$$

expresión que hará una representación gráfica simultánea de las funciones $\sin x$ y $\sin 2x$. Si queremos indicar cual será el rango de representación de las funciones, teclearemos

$$(\%i3)\ \text{plot2d}([\sin(x), \sin(2*x)], [x, 0, 2*\%pi], [y, 0, 1]);$$
$$(\%o3)$$

que nos dará la representación de las funciones entre 0 y 1, no representando nada cuándo la imagen se halle fuera de dicho intervalo.

Actividad 15 *Representar gráficamente las siguientes funciones de una variable:*

(a) $f(x) = \frac{1+x}{1-x^2}$ *en el dominio* $[-2, 2]$.

(b) $f(x) = e^{x^2} \frac{1+x}{1-x^2}$ *en el dominio* $[-2, 2]$.

(c) $f(x) = \sin\left(\frac{1+x}{1-x^2}\right)$ *en el dominio* $[-2, 2]$.

La sentencia plot2d admite distintos tipos de sentencias que al ser introducidas justo despues de la misma, permite hacer diferentes gráficos unidimensionales. Así, el comando empleado para representar curvas parametrizadas en el plano es plot2d, añadiendole la opción **parametric**, e indicándole el número de puntos que vamos a usar en la representación que introducimos con la expresion **nticks**. Por ejemplo, para representar la curva $\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \sin 2t \end{cases}$ en el dominio $[0, 2\pi]$ debemos teclear

$$(\%i1)\ \text{plot2d}([parametric, \sin(t), \sin(2*t), [t, 0, 2*\%pi], [nticks, 1000]])\$$$

que nos dará la representación deseada con una malla de 1000 puntos. Al aumentar el número de puntos mejoramos la representación pero aumentamos el tamaño del fichero y el tiempo de computación.

Actividad 16 *Representar gráficamente las siguientes curvas en el plano.*

(a) $\left\{ \begin{array}{l} x(t) = \cos 2t \\ y(t) = \sin t \end{array} \right.$ *en el dominio* $[0, 2\pi]$.

(b) $\left\{ \begin{array}{l} x(t) = \frac{1}{t} \\ y(t) = t^2 \end{array} \right.$ *en el dominio* $[-1, 1]$.

(c) $\left\{ \begin{array}{l} x(t) = t^3 \\ y(t) = \sqrt{t} \end{array} \right.$ *en el dominio* $[0, 2]$.

(d) $\left\{ \begin{array}{l} x(t) = t^2 \\ y(t) = t \end{array} \right.$ *en el dominio* $[0, 2]$.

(e) $\left\{ \begin{array}{l} x(t) = \cos t^2 \\ y(t) = \sin t^2 \\ z(t) = \sqrt{t} \end{array} \right.$ *en el dominio* $[0, 2\pi]$.

3.1.1 El paquete draw

La sentencia **plot2d** en su forma paramétrica permite la representación de curvas planas, pero no es posible representar curvas en tres dimensiones. Para esto, y para mucho más, disponemos del paquete **draw**, que previamente debemos cargar usando la sentencia

```
load(draw)
```

o

```
load(draw)$
```

si no queremos que nos escriba nada a continuación. Como una primera aproximación, este paquete dispone de las sentencias **draw2d**. La sintaxis es un poco distinta a la de **plot2d**. A modo de ejemplo dibujamos una circunferencia

```
draw2d(nticks=1000,parametric(cos(t),sin(t),t,0,2*%pi))
```

Además, la sentencia implicit permite representar curvas dadas en forma implícita. Por ejemplo, la circunferencia $(x-3)^2+y^2 = 4$ se puede representar escribiendo

```
draw2d(nticks=1000,implicit((x-3)^2+y^2=4,x,0,6,y,-2,2))
```

Actividad 17 *Representar gráficamente las siguientes curvas en el plano y el espacio utilizando el paquete draw.*

(a) $\begin{cases} x(t) = \cos 2t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$ *en el dominio* $[0, 2\pi]$.

(b) $\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = t^2 \end{cases}$ *en el dominio* $[-1, 1]$.

(c) $\begin{cases} x(t) = t^3 \\ y(t) = \sqrt{t} \end{cases}$ *en el dominio* $[0, 2]$.

(d) $\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t \end{cases}$ *en el dominio* $[0, 2]$.

(e) $\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \cos t + \log(\tan \frac{t}{2}) \end{cases}$ *en el dominio* $[0, \pi]$ ***(Tractriz)***.

(g) $\begin{cases} x(t) = \dfrac{3t}{1+t^3} \\ y(t) = \dfrac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$ *en el dominio* $[-50, 50]$ ***(Folium de Descartes)***.

(h) $\begin{cases} x(t) = e^{t/20} \cos t \\ y(t) = e^{t/20} \sin t \end{cases}$ *en el dominio* $[0, 10\pi]$ ***(Espiral logarítmica)***.

3.2 Integración en curvas

La sentencia integrate permite calcular la integral de una función compleja sobre una curva a partir de la definición. A modo de ejmplo vamos a calcular

$$\int_\gamma \overline{z} dz$$

donde $\gamma(t) = 1 + 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Para ello definimos la curva

$$(\%i1)\ curva(t) := 1 + 2 * cos(t) + \%i * 2 * sin(t);$$

y su derivada

$$(\%i2)\ dcurva : diff(curva(t), t);$$

la función

$$(\%i3)\ f(z) := conjugate(z);$$

el integrando

$$(\%i4)\ int : dcurva * f(curva(t));$$

y la integral es por tanto

$$(\%i5)\ integrate(int, t, 0, 2 * \%pi);$$
$$(\%o5)\ 8\%i\pi$$

Actividad 18 *Calcular las siguientes integrales*

1. $\int_\gamma \overline{z} dz$, *$\gamma$ la recta uniendo* $1+i$ *con* $2-7i$.
2. $\int_\gamma \overline{z}\,\mathrm{Re}(z) dz$, *$\gamma$ la recta uniendo* i *con* 2.
3. $\int_\gamma \mathrm{Im}(z)/z dz$, *$\gamma$ la semicircunferencia* $\gamma(t) = 1+i+3e^{it}$, $t \in [0,\pi]$.
4. $\int_\gamma \overline{z} dz$, *$\gamma$ el poligono de vértices* $1+i$, $7i$, *2 y 2-i.*

3.3 Series de potencias y de Laurent

Podemos desarrollar una función en serie de potencias y de Laurent alrededor de z_0 usando la sentencia powerseries con la siguiente sintaxis

$$\text{powerseries(f(z),z,}z_0\text{).}$$

Por ejemplo, el desarrollo de

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1}$$

alrededor de 0 es de la forma

$$(\%i1)\ \text{powerseries(1/(z\^{}2+1),z,0);}$$
$$(\%o1)\ \sum_{i1=0}^{\infty} (-1)^{i1} z^{2i1}$$

Para poner índices más usuales en vez de $i1$ tenemos la sentencia niceindices. Para ello escribimos

(%i2) niceindices(powerseries(1/(z^2+1),z,0));

$$(\%o2)\ \sum_{i1=0}^{\infty}(-1)^i z^{2i}$$

Para hallar la serie de Laurent alrededor de i escribimos

(%i1) niceindices(powerseries(1/(z^2+1),z,%i));

$$(\%o1)\ -\frac{\%i\sum_{i=0}^{\infty}2^{-i-1}(-1)^{i/2}(z-\%i)^i}{z-\%i}$$

Actividad 19 *Calcular los desarrollos en serie de potencias o de Laurent centrados en los puntos indicados:*

1. $f(z)=\frac{1}{z^2(z-i)}$ *en* $z_0=1,\ 0$ *e* i.
2. $f(z)=\frac{1}{z^2(z^2-i)}$ *en* $z_0=1,\ 0$ *e* i.
3. $f(z)=\cos(1/z)$ *en* $z_0=0$.
4. $f(z)=\frac{z^3+1}{(z-1)^2(z-i)}$ *en* $z_0=1,\ 0$ *e* i.

3.4 Teorema de los residuos

Una vez que conocemos los polos de una función, podemos calcular de manera sencilla sus residuos en dichos polos utilizando la sentencia residue con la sentencia residue con la sintaxis

residue(f(z),z,z$_0$)

donce $f(z)$ es la función y z_0 el polo de la misma. No es posible utilizarla para singularidades esenciales como por ejemplo el residuo en 0 de la función $e^{1/z}$. Por ejemplo, para calcular el residuo de la función $f(z)=\frac{z}{z^2+1}$ tecleamos

(%i1) residue(z/(z^2+1),z,%i)

$$(\%o1)\ \frac{1}{2}$$

y

(%i1) residue(z/(z^2+1),z,-%i)
(%o1) $\frac{1}{2}$

Actividad 20 *Utiliza el teorema de los residuos para calcular las integrales siguientes:*

(a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{-z}}{z^2}\,dz,\qquad \gamma(t) = 3\,e^{\mathbf{i}t},\ t \in [0, 2\pi]$

(b) $\displaystyle\int_\gamma z^2 e^{1/z}\,dz,\qquad \gamma(t) = 3\,e^{\mathbf{i}t},\ t \in [0, 2\pi]$

(c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z+1}{z^2-2z}\,dz,\qquad \gamma(t) = 3\,e^{\mathbf{i}t},\ t \in [0, 2\pi]$

(d) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z}{(z-1)(z-2)}\,dz,\qquad \gamma(t) = 2 + \frac{e^{\mathbf{i}t}}{2},\ t \in [0, 2\pi]$

Actividad 21 *Sea* $\gamma(t) = 1 + re^{it}$*,* $t \in [0, 2\pi]$*. Calcular en función del parámetro* r *el valor de las siguientes integrales:*

1. $\displaystyle\int_\gamma \frac{z-1}{z^3+2z^2+z}dz.$

2. $\displaystyle\int_\gamma \frac{2z}{z^4+2z^2+1}dz.$

3. $\displaystyle\int_\gamma e^z\frac{z^2}{z^3-2z^2+1}dz.$

4. $\displaystyle\int_\gamma z^2e^{1/z}dz.$

Actividad 22 *Sea* γ *el cuadrado de vértices* (R, R)*,* $(-R, R)$*,* $(-R, -R)$ *y* $(R, -R)$ *recorrido en sentido positivo. Determinar las integrales siguientes en función del parámetro* R*.*

1. $\displaystyle\int_\gamma \frac{z-1}{z^3+2z^2+z}dz.$

2. $\displaystyle\int_\gamma \frac{2z}{z^4+2z^2+1}dz.$

3. $\displaystyle\int_\gamma e^z \frac{z^2}{z^3-2z^2+1}dz.$

4. $\displaystyle\int_\gamma z^2 e^{1/z} dz.$

Chapter 4

Transformada de Laplace

4.1 Transformada de Laplace

En general *Maxima* tiene implementada una sentencia para obtener la transformada de Laplace de la mayoría de las funciones que conocemos. Para calcular la transformada de Laplace de una función $f(t)$ tenemos la sentencia laplace, cuya sintaxis es

```
laplace(f(t),t,z)
```

donde t es la variable de la que depende la función $f(t)$ y z es la variable independiente de la transformada de $f(t)$. Por ejemplo, si tecleamos

```
laplace(sin(t),t,z)
```

obtenemos la salida

$$\frac{1}{1+z^2}.$$

La función laplace reconoce las funciones elementales, así como derivadas y primitivas de estas, combinadas con las sentencias de Maxima que permiten obtener derivadas y primitivas de funciones. Por ejemplo, si tecleamos

```
laplace(derivative(sin(t),t),t,z)
```

obtenemos la transformada del coseno

$$\frac{z}{1+z^2},$$

mientras que

```
laplace(integrate(sin(t),t),t,z)
```

obtendremos

$$-\frac{z}{1+z^2}.$$

También es capaz de trabajar con funciones de Heaviside, siendo $h_0(t)$ llamada como **unit_step**, por lo que tecleando

```
laplace(unit_step(t),t,z)
```

obtenemos la salida

$$\frac{1}{z}.$$

Si queremos teclear la función de Heaviside $h_a(t)$ para $a > 0$, basta darse cuenta que esta no es otra que $h_0(t-a)$. Por ejemplo, si tecleamos

```
laplace(unit_step(t-2),t,z)
```

obtenemos

$$\frac{\%e^{-2z}}{z}$$

que es su transformada de Laplace.

Actividad 23 *Calcular la transformada de Laplace de las siguientes funciones*

(a) $f(t) = \sin(3t)$ *(b)* $f(t) = e^{5t}$ *(c)* $f(t) = e^{5t}\cos 3t$ *(d)* $f(t) = te^t$

(e) $f(t) = t^3 - t$ *(f)* $f(t) = \sinh t$ *(g)* $f(t) = \cos t \sin t$ *(h)* $f(t) = e^t \cos t \sin(2t)$

Actividad 24 *Calcular la transformada de Laplace de la función,*

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{si } 0 \le t \le 1 \\ 1, & \text{si } 1 < t \le 2 \\ 0, & \text{si } t > 2 \end{cases}$$

Actividad 25 *Calcular la transformada de Laplace de las siguientes funciones.*

(a) $f(t) = t\sin t$ *(b)* $g(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \le t \le 1 \\ t, & \text{si } t > 1 \end{cases}$ *(c)* $h(t) = \begin{cases} t^2-1, & \text{si } 0 \le t \le 2 \\ 2, & \text{si } t > 2 \end{cases}$

4.2 Transformada de Laplace inversa

Para calcular la transformada inversa tenemos la sentencia ilt, que se escribe según la regla

```
ilt(f(z),z,t)
```

donde t y z tienen el mismo rol que en el caso anterior. Calcula la transformada inversa de Laplace de funciones $f(z)$ que sean fracciones de polinomios cuyo denominador tenga sólo factores lineales y cuadráticos y sus potencias. Por ejemplo

```
ilt(1/(1+z^2),z,t)
```

nos devolverá la salida

```
sin(t).
```

En general habrá que descomponer cualquier cociente de polinomios en fracciones simples y posteriormente obtener su transformada de Laplace inversa. Para reducir un polinomio a fracciones simples podemos utilizar la sentencia **partfrac**, cuya sintaxis es

```
partfrac(f(z),z)
```

que descompondrá la función racional f(z). Por ejemplo, tomemos la fracción

$$\frac{1}{z^4 - 4z^3 + 5z^2 - 4z + 4}$$

y tecleamos

```
partfrac(1/(z^4-4*z^3+5*z^2-4*z+4),z)
```

dará la salida

$$\frac{4z+3}{25(z^2+1)} - \frac{4}{25(z-2)} + \frac{1}{5(z-2)^2}.$$

Tecleando ahora

```
ilt((4*z+3)/(1+z^2),z,t)
```

obtenemos

$$3sin(t) + 4cos(t),$$

posteriormente

```
ilt(1/(z-2),z,t)
```

$$\%e^{2t}$$

y finalmente

```
ilt(1/(z-2)^2,z,t)
```

$$t\%e^{2t}$$

obtenemos la transformada de Laplace inversa de $\frac{1}{z^4-4z^3+5z^2-4z+4}$ la construimos por linealidad como

$$\frac{1}{25}(3sin(t)+4cos(t))-\frac{4}{25}e^{2t}+\frac{1}{5}te^{2t}.$$

Para obtener la transformada de Laplace inversa de funciones de la forma

$$e^{-az}f(z),$$

donce f(z) es un cociente de polinomios, necesariamente hemos de utilizar el segundo teorema de traslación.

Actividad 26 *Calcular la transformada inversa de Laplace de las funciones siguientes*

$$(a)\ F(z)=\frac{z^2}{1+z^3}\quad (b)\ F(z)=\frac{1}{(z-\mathbf{i})(z^2-2)}\quad (c)\ F(z)=\frac{z+7}{z^2+2z+5}$$

$$(d)\ F(z)=\frac{1}{(z+1)(z+2)(z^2+2z+10)}$$

Actividad 27 *Calcular la transformada inversa de Laplace de las siguientes funciones:*

$$(a)\ F(z)=\frac{ze^{-\pi z}}{z^2+2z+5}\quad (b)\ F(z)=\frac{(z-1)e^{-z}}{z^3+2}$$
$$(c)\ F(z)=\frac{z+1}{e^z z^2(z^2+9)}\quad (d)\ F(z)=\frac{z+1}{z^4}$$

4.3 Resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

Como sabemos, la transformada de Laplace se puede aplicar a la resolución de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Supongamos la ecuación

$$\begin{cases} y'' + y = \sin t, \\ y(0) = 1, y'(0) = 0. \end{cases}$$

Para calcular la solución la transformamos utilizando la sentencia **laplace** si fuera necesario, obteniendo

$$(z^2+1)\mathcal{L}[y](z) - zy(0) - y'(0) - y(0) = \frac{1}{1+z^2},$$

y simplificando

$$(z^2+1)\mathcal{L}[y](z) = z + 1 + \frac{1}{1+z^2},$$

de donde

$$\mathcal{L}[y](z) = \frac{z+1}{(z^2+1)} + \frac{1}{(z^2+1)^2}.$$

Usando la sentencia **ilt** construimos la solución de la forma

$$y(t) = \frac{1}{2}(-t\cos t + \sin t) + \cos t.$$

Por si fuera necesario, al final añadimos una sección de cómo resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones algebraicas lineales con el programa Maxima.

Actividad 28 *Utilizar la transformada de Laplace para resolver los siguientes problemas de Cauchy asociados a ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes:*

$$\left.\begin{array}{l} y'''(t) + 5y''(t) + 17y'(t) + 13y(t) = 1 \\ y(0) = y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} y'(t) + 3y(t) = e^{-2t} \\ y(0) = 2 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 5e^{-t}\sin t \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} y''(t) + y(t) = t \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -2 \end{array}\right\}$$

Actividad 29 *Utilizar la tranformada de Laplace para resolver el problema de Cauchy*

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = f(t), \\ y(0) = 1, y'(0) = 0. \end{cases}$$

donde $f(t)$ son la funciones del ejericio 25.

Actividad 30 *Resolver los siguientes problemas de condiciones iniciales:*

$$(a) \begin{cases} x' = y \\ y' = -x \\ x(0) = y(0) = 1. \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x' = -4(x+y) \\ x' + 4y' = -4y \\ x(0) = 1,\ y(0) = 0. \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x' = 3x + 8y \\ y' = -3y - x \\ x(0) = 6,\ y(0) = -2. \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x' = x - z \\ y' = 2y \\ z' = x + z \\ x(0) = -2,\ y(0) = 2,\ z(0) = -1. \end{cases} \quad (e) \begin{cases} x' = y + z \\ y' = -x + z \\ z' = -x - y \\ x(0) = y(0) = z(0) = -1. \end{cases}$$

4.4 Resolución de sistemas de ecuaciones lineales con Maxima

Si tenemos que resolver un sistema de ecuaciones lineales de la forma $AX = b$ donde A es una matriz de n filas por m columnas, X es una vector columna incógnita de n componentes y b es un vector de m componentes, disponemos de la sentencia

$$linsolve([expr\_1, ..., expr\_m], [x\_1, ..., x\_n]),$$

donde expr_1,...,expr_m son las m ecuaciones lineales que definen el sistema y x_1,...,x_n son las incógnitas del mismo. Para introducir las ecuaciones utilizamos el signo de igualdad =, como es usual. Por ejemplo, si queremos resolver el sistema

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x + 2y = 1 \end{array} \right\}$$

escribiremos

$$(\%i1)\ lin\,\mathrm{solve}([x + y + z = 1, x + 2 * y = 1], [x, y, z]);$$
$$(\%o1)[x = 1 - 2 * \%r1, y = \%r1, z = \%r1]$$

con lo que la solución del sistema depende del parámetro $r1$ y presenta la forma paramétrica

$$\begin{cases} x = 2t, \\ y = t \quad \text{donde } t \in \mathbb{R}. \\ z = t, \end{cases}$$

Dentro de la resolución de ecuaciones existen una serie de alternativas que a continuación pasamos a describir. Las alternativas vienen dados por funciones que tienen asignados el valor true si están activadas y false si no lo están. Según esten activadas o no dichas funciones el programa efectúa las operaciones y presenta resultados de una u otra forma. Para cambiar la asignación true o false basta con teclear

$$\begin{aligned} &(i\%1)\ nombre\_funcion : true; \\ &(o\%1)\ true \end{aligned}$$

que asigna a la funcion el valor true y el correspondiente

$$\begin{aligned} &(i\%1)\ nombre\_funcion : false; \\ &(o\%1)\ false \end{aligned}$$

para false. Para ver qué valor tiene una función en un determinado momento basta con ejecutarla. Veamos los parámetros o funciones más relevantes.

- **linsolve_params** Valor por defecto: true. Si linsolve_params es true, la función linsolve genera símbolos %r para representar parámetros arbitrarios para representar la solución de forma paramétrica. Si vale false, el resultado devuelto para un sistema es indeterminado elimina las ecuaciones dependientes y se expresa con la forma general. Por ejemplo

$$\begin{aligned} &(\%i1)\ lin\,\text{solve}\ \_params : false; \\ &(o\%1)\ false \\ &(\%i2)\ lin\,\text{solve}([x + y + z = 1, x + 2 * y = 1], [x, y, z]); \\ &(\%o2)[x = 1 - 2 * z, y = z] \end{aligned}$$

- **globalsolve** Valor por defecto: false. Si se activa a true, al resolver el sistema asigna a las incógnitas el valor de las soluciones, de igual forma que se introducen las constantes. Por ejemplo

$$(\%i1)\ global\,\mathrm{solve} : true;$$
$$(o\%1)\ true$$
$$(\%i2)\ lin\,\mathrm{solve}([x + y + z = 1, x + 2 * y = 1], [x, y, z]);$$
$$(\%o2)[x : 1 - 2 * \%r1, y : \%r1, z : \%r1]$$

- **programmode** Valor por defecto: true. Si cambiamos a false, linsolve muestra la solución con etiquetas de expresiones intermedias (%t). Por ejemplo

$$(\%i1)\ programmode : false;$$
$$(o\%1)\ false$$
$$(\%i2)\ lin\,\mathrm{solve}([x + y + z = 1, x + 2 * y = 1], [x, y, z]);$$
$$(\%t2)\ x = 1 - 2 * \%r1$$
$$(\%t3)\ y = \%r1$$
$$(\%t4)\ z = \%r1$$
$$(\%o2)[\%t2, \%t3, \%t4]$$

Finalemente, se admiten diferentes combinaciones de las funciones anteriores, es decir, algunas de ellas con valor false y otras true, lo que da lugar a diferentes maneras de representar las soluciones y ejecutar la funcion linsolve.

Actividad 31 *Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:*

$$(a)\ \begin{cases} x - y = -1 \\ -x + y = 1 \\ 2x - 2y = -2 \end{cases} \qquad (b)\ \begin{cases} 2x + y + 4z = 0 \\ x - y + 2z = 4 \\ 2x + y - z = 14 \\ 3x + z = 18 \end{cases}$$

$$(c)\ \begin{cases} 2x + 2y - 3z = 2 \\ -x + 5y - 4z = 4 \\ x + 7y - 7z = 7 \end{cases} \qquad (d)\ \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 2y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$(e)\ \begin{cases} x + 2y - 3z + 16t = 4 \\ y + 2z - 3t = 6 \\ -x - y + z + 9t = -2 \end{cases} \qquad (f)\ \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + 5y + 6z = 0 \end{cases}$$

Por ejemplo, el problema de condiciones iniciales anterior

$$\begin{cases} y'' + y = \sin t, \\ y(0) = 1, y'(0) = 0, \end{cases}$$

lo podemos resolver de la siguiente manera.

$$(\%i1)\ eq : diff(y(t), t, 2) + y(t) = sin(t)\$$$

$$(\%i2)\ eq2 : laplace(eq, t, z)\$$$

$$(\%i3)\ linsolve(eq2, laplace(y(t), t, z));$$

$$(\%o3)\ [laplace(y(t), t, z) = \frac{y(0)z^3 + \left(\frac{d}{dt}y(t)|_{t=0}\right) z^2 + y(0)z + \left(\frac{d}{dt}y(t)|_{t=0}\right) + 1}{z^4 + 2z^2 + 1}]$$

Reescribimos la sentencia con los valores de las condiciones iniciales y calculamos la transformada de Laplace inversa,

$$(\%i4)\ ilt((z\hat{}3 + z + 1)/(z\hat{}4 + 2 * z\hat{}2 + 1), z, t)$$

Usando la sentencia **ilt** construimos la solución de la forma

$$y(t) = \frac{1}{2}(-t \cos t + \sin t) + \cos t.$$