

## MATEMÁTICAS 2. GIE.

### ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES.

1. Encontrar las soluciones de los siguientes problemas de contorno:

- (a)  $y'' + \lambda y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(L) = 0$ .
- (b)  $y'' + \lambda y = 0$ ,  $y'(0) = 0$ ,  $y'(L) = 0$ .
- (c)  $y'' + \lambda y = 0$ ,  $y'(0) = 0$ ,  $y(L) = 0$ .
- (d)  $y'' + \lambda y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(\pi) - y'(\pi) = 0$ .
- (e)  $y'' + \lambda y = 0$ ,  $y(0) - y'(0) = 0$ ,  $y(1) = 0$ .
- (f)  $y'' + \lambda y = 0$ ,  $y(0) - y'(0) = 0$ ,  $y(\pi) - y'(\pi) = 0$ .

2. Para qué valores de  $\lambda$  tienen soluciones no triviales los siguientes problemas de contorno:

- (a)  $y'' - 2y' + (1 + \lambda)y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = 0$ .
- (b)  $y'' + \lambda y = 0$ ,  $y(0) = y(2\pi)$ ,  $y'(0) = y'(2\pi)$ .

3. Clasificar las siguientes EDP y encontrar su forma canónica:

- (a)  $3u_{xx} + 4u_{yy} - u = 0$ .
- (b)  $4u_{xx} + u_{xy} + 4u_{yy} + u = 0$ .
- (c)  $u_{xx} + u_{yy} + 3u_x - 4u_y + 25u = 0$ .
- (d)  $u_{xx} - 3u_{yy} + 2u_x - u_y + u = 0$ .
- (e)  $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 3u = 0$ .

4. Encontrar los desarrollos en serie de Fourier de las siguientes funciones periódicas (se da su valor en el intervalo  $[-l, l]$  con  $2l$  el periodo).

(a)  $f(x) = \begin{cases} -1 & x \in [-1, 0), \\ 1 & x \in [0, 1]. \end{cases}$

(b)  $f(x) = \begin{cases} x & x \in [-2, 0), \\ 0 & x \in [0, 2]. \end{cases}$

(c)  $f(x) = x$ ,  $x \in [-1, 1]$ .

(d)  $f(x) = \begin{cases} -x & x \in [-1, 0), \\ x & x \in [0, 1]. \end{cases}$

(e)  $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-2, 0), \\ 0 & x \in [0, 1), \\ 1 & x \in [1, 2]. \end{cases}$

(f)  $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-2, 1), \\ 1 & x \in [1, 2]. \end{cases}$

(g)  $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-L, 0), \\ e^x & x \in [0, L]. \end{cases}$

(h)  $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \in [-L, 0), \\ e^x & x \in [0, L]. \end{cases}$

5. Los extremos de una barra de aluminio ( $\alpha^2 = 0.86$ ) de longitud 10 metros se mantienen a temperatura de  $0^\circ\text{C}$ . Encontrar la expresión de la temperatura de la barra para las siguientes condiciones iniciales

- (a)  $u(0, y) = 70, 0 \leq y \leq 10.$
- (b)  $u(0, y) = 70 \cos y, 0 \leq y \leq 10.$
- (c)  $u(0, y) = \begin{cases} 10y & y \in [0, 5), \\ 10(10 - y) & y \in [5, 10]. \end{cases}$
- (d)  $u(0, y) = \begin{cases} 0 & y \in [0, 3), \\ 65 & y \in [3, 10]. \end{cases}$

6. La variación respecto de la variable espacial de la temperatura de los extremos de una barra de aluminio ( $\alpha^2 = 0.86$ ) de longitud 10 metros es constante e igual a 0. Encontrar la expresión de la temperatura de la barra para las siguientes condiciones iniciales

- (a)  $u(0, y) = 70, 0 \leq y \leq 10.$
- (b)  $u(0, y) = 70 \cos y, 0 \leq y \leq 10.$
- (c)  $u(0, y) = \begin{cases} 10y & y \in [0, 5), \\ 10(10 - y) & y \in [5, 10]. \end{cases}$
- (d)  $u(0, y) = \begin{cases} 0 & y \in [0, 3), \\ 65 & y \in [3, 10]. \end{cases}$

7. Los extremos de una barra de cobre ( $\alpha^2 = 1.14$ ) de longitud 2 metros se mantienen a temperatura de  $0^\circ C$ . Encontrar la expresión de la temperatura de la barra para las siguientes condiciones iniciales

- (a)  $u(0, y) = 65 \cos^2(\pi y), 0 \leq y \leq 2.$
- (b)  $u(0, y) = 70 \sin y, 0 \leq y \leq 2.$
- (c)  $u(0, y) = \begin{cases} 60x & x \in [0, 1), \\ 60(2 - x) & x \in [1, 2]. \end{cases}$
- (d)  $u(0, y) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1), \\ 75 & x \in [1, 2]. \end{cases}$

8. Repetir el problema anterior con condiciones de Newman nulas.

9. Un estado de equilibrio para la ecuación del calor  $u_t = \alpha^2 u_{xx}$  es aquella que no varía con el tiempo. Demostrar

- (a) Todos los equilibrios de la ecuación del calor son de la forma  $u(y) = A + By$ .
- (b) Encontrar los estados de equilibrio de la ecuación del calor que cumplen  $u(t, 0) = T_1$  y  $u(t, L) = T_2$ .
- (c) Resolver el problema

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{yy}, & t > 0, & y \in (0, 1), \\ u(0, y) = 75, & 0 < y < 1, \\ u(t, 0) = 20, & u(t, L) = 60, & t > 0. \end{cases}$$

**Ayuda:** Calcularla como  $u(t, y) = v(y) + w(t, y)$  donde  $v(y)$  es el estado de equilibrio asociado a las condiciones de contorno  $u(t, 0) = 20, u(t, L) = 60$ , y  $w(t, y)$  es la solución del problema con condiciones de contorno nulas.

10. Los extremos de una barra de cobre ( $\alpha^2 = 1.14$ ) de longitud 10 centímetros se mantienen a temperatura de  $0^\circ C$  mientras que el centro de la barra es mantenido a  $100^\circ C$  mediante una fuente de calor externa. Encontrar la temperatura de la barra con el tiempo para la condición inicial

$$u(0, y) = \begin{cases} 50 & x \in [0, 5), \\ 100 & x \in [5, 10]. \end{cases}$$

**Ayuda:** Descomponer el problema en dos problemas de contorno con uno de los extremos en la mitad de la barra.

11. Resolver los problemas

$$\begin{cases} u_t = u_{yy} + u, & t > 0, y \in (0, 1), \\ u(0, y) = \cos y, & 0 < y < 1, \\ u(t, 0) = 0, u(t, 1) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t = u_{yy} + u, & t > 0, y \in (0, 1), \\ u(0, y) = \cos y, & 0 < y < 1, \\ u_y(t, 0) = 0, u_y(t, 1) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

12. Resolver los siguientes problemas

$$(a) \begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{yy}, & t > 0, y \in (0, 2\pi), \\ u(0, y) = \cos y - 1, & 0 < y < 2\pi, \\ u_t(0, y) = 0, & 0 < y < 2\pi, \\ u(t, 0) = 0, u(t, 2\pi) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{yy}, & t > 0, y \in (0, 1), \\ u(0, y) = 0, & 0 < y < 1, \\ u_t(0, y) = 1, & 0 < y < 1, \\ u(t, 0) = 0, u(t, 1) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{yy}, & t > 0, y \in (0, 3), \\ u(0, y) = f(y), & 0 < y < 3, \\ u_t(0, y) = 0, & 0 < y < 3, \\ u(t, 0) = 0, u(t, 3) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad \text{donde } f(y) = \begin{cases} x & x \in [0, 1), \\ 1 & x \in [1, 2), \\ 2 - x & x \in [2, 3]. \end{cases}$$

13. Resolver los siguientes problemas

$$(a) \begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{yy}, & t > 0, y \in (0, 2\pi), \\ u(0, y) = \cos y - 1, & 0 < y < 2\pi, \\ u_t(0, y) = 0, & 0 < y < 2\pi, \\ u_y(t, 0) = 0, u_y(t, 2\pi) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{yy}, & t > 0, y \in (0, 1), \\ u(0, y) = 0, & 0 < y < 1, \\ u_t(0, y) = 1, & 0 < y < 1, \\ u_y(t, 0) = 0, u_y(t, 1) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{yy}, & t > 0, y \in (0, 3), \\ u(0, y) = f(y), & 0 < y < 3, \\ u_t(0, y) = 0, & 0 < y < 3, \\ u_y(t, 0) = 0, u_y(t, 3) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad \text{donde } f(y) = \begin{cases} x & x \in [0, 1), \\ 1 & x \in [1, 2), \\ 2 - x & x \in [2, 3]. \end{cases}$$

14. Una cuerda de 10 metros fijada en sus extremos se levanta por el medio hasta la distancia de un metro y se suelta. Describe su movimiento suponiendo que  $c^2 = 1$ .

15. Demuestra que el cambio de coordenadas

$$\begin{cases} \tau = y + ct, \\ \xi = y - ct, \end{cases}$$

transforma la ecuación de ondas  $u_{tt} = c^2 u_{yy}$  en la ecuación  $u_{\tau\xi} = 0$ . Concluir que la solución general de la ecuación será de la forma

$$u(t, y) = F(y - ct) + G(y + ct)$$

para funciones apropiadas  $F$  y  $G$ .

16. Demostrar que la solución del problema

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{yy}, & t > 0, \quad y \in (0, L), \\ u(0, y) = f(y), & 0 < y < L, \\ u_t(0, y) = g(y), & 0 < y < L, \\ u(t, 0) = 0, \quad u(t, 3) = 0, & t > 0, \end{cases}$$

es de la forma

$$u(t, y) = \frac{1}{2} (F(y - ct) + F(y + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{y-ct}^{y+ct} g(x) dx,$$

donde  $F$  es la extensión  $2l$  periódica e impar de  $f$ .

17. Resolver el problema

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{yy} + u, & t > 0, \quad y \in (0, L), \\ u(0, y) = f(y), & 0 < y < L, \\ u_t(0, y) = 0, & 0 < y < L, \\ u(t, 0) = 0, \quad u(t, 3) = 0, & t > 0, \end{cases}$$

18. Resolver los problemas

$$(a) \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & (x, y) \in (0, 5) \times (0, 6), \\ u(x, 0) = 0, & 0 < x < 5, \\ u(x, 6) = x^2, & 0 < x < 5, \\ u(0, y) = u(5, y) = 0, & 0 < y < 6. \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1), \\ u(x, 0) = u(x, 1) = 0, & 0 < x < 1, \\ u(0, y) = \sin(\pi y), & 0 < y < 1, \\ u(1, y) = 0, & 0 < y < 1. \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & (x, y) \in (0, 4) \times (0, 1), \\ u(x, 0) = \cos(4x), & 0 < x < 4, \\ u(x, 1) = 0, & 0 < x < 4, \\ u(0, y) = g(y), & 0 < y < 1, \\ u(4, y) = 0, & 0 < y < 1. \end{cases}$$

19. Resolver los problemas de Neuman

$$(a) \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1), \\ u_y(x, 0) = u_y(x, 1) = 0, & 0 < x < 1, \\ u_x(0, y) = y, & 0 < y < 1, \\ u_x(1, y) = 0, & 0 < y < 1. \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & (x, y) \in (0, 2) \times (0, 3), \\ u_x(0, y) = u_x(3, y) = 0, & 0 < y < 3, \\ u_y(x, 0) = e^x, & 0 < x < 2, \\ u_y(x, 3) = 0, & 0 < x < 2. \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & (x, y) \in (0, 5) \times (0, 10), \\ u_x(0, y) = 1, & 0 < y < 10, \\ u_x(5, y) = 0, & 0 < y < 10, \\ u_y(x, 0) = 1, & 0 < x < 5, \\ u_y(x, 10) = 0, & 0 < x < 5. \end{cases}$$

20. Resolver el problema

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = u, & (x, y) \in (0, 1)^2, \\ u(x, 0) = u(x, 1) = 0, & 0 < x < 1, \\ u(0, y) = y - 1, & 0 < y < 1, \\ u(1, y) = 0, & 0 < y < 1. \end{cases}$$