Prácticas de Matemáticas 2 con Maxima.

Jose Salvador Cánovas Peña.
Departamento de Matemática Aplicada.

Contents

¿Qué es Maxima?

Maxima es un programa que permite hacer cálculos matemáticos complicados con gran rapidez. Para entendernos, es como una especie de calculadora gigante a la que no sólo podemos pedirle que haga cálculos numéricos, sino que también hace derivadas, cálculo de primitivas, representación gráfica de curvas y superficies, factorización de polinomios etc.

Abordamos en esta práctica una iniciación a Maxima partiendo desde cero, e intentaremos poner de manifiesto su utilidad a la hora de trabajar con expresiones matemáticas complicadas, permitiendo hacer éstas con poco coste de tiempo.

Será necesaria por parte del alumno una lectura previa de esta práctica antes de empezar a trabajar con el programa. Esta lectura previa tiene por objeto el conocimiento de ciertas sentencias clave que permiten el manejo del programa. Al igual que al aprender el manejo de una calculadora científica es necesario leer las instruciones de la misma, estas notas pueden ser útiles para aprender el manejo de Maxima.

Por otra parte, a pesar de la potencia evidente del programa, hemos de hacer notar que es necesario por parte del alumno un conocimiento matemático teórico de todas las funciones y sentencias que vamos a usar. Por ejemplo, aunque una calculadora multiplica números con suma facilidad, sólo nos percatamos de su potencia en cuanto conocemos dicha operación y somos capaces de realizarla de un modo mucho más lento. Con Maxima ocurre lo mismo. Sólo conociendo teóricamente las operaciones que Maxima realiza nos percataremos de su indudable utilidad.

Chapter 1

Preliminares

Cuando se arranca Maxima, aparece una pantalla blanca vacía. En ella podemos escribir aquellas operaciones que queremos que realice. Una vez tecleada la operación, hemos de pulsar las teclas *shift + enter* para obtener el resultado. Por ejemplo, supongamos que queremos hacer la operación 2+2. Teclearemos entonces

$$2+2$$

en la pantalla. A continuación pulsamos *shift + enter* y aparecerá lo siguiente en pantalla:

$$\begin{array}{ll} (\%i1) & 2+2; \\ (\%o1) & 4 \end{array}$$

siendo %i1 la entrada uno, proporcionando la salida %o1.

Además se pueden realizar las siguiente operaciones algebraicas:

$$\begin{array}{rcl} x+y & \rightarrow & suma \\ x-y & \rightarrow & resta \\ x/y & \rightarrow & división \\ x*y & \rightarrow & producto \\ x\hat{}y & \rightarrow & potencia. \end{array}$$

Actividad 1 *Realizar las siguientes operaciones con Maxima:*

(a) $3.75+8.987=$

(b) $(2-3.1)^{23} =$

(c) $\frac{2.4+3^2}{4*7.2^2} =$

(d) $2 \times 10^2 + 3 \times 10^{-3} =$

(e) $\left(\frac{2.3*4}{2-4.5^2}\right)^{56} =$

A la hora de trabajar con Maxima, hemos de tener en cuenta que hay dos modalidades admisibles. Tomemos por ejemplo la operacion

$$2 \times 10^2 + 3 \times 10^{-3}.$$

Si introducimos la sentencia

$$2 * 10^2 + 3 * 10^{-3}$$

obtendremos al ejecutarla

$$\begin{array}{ll} (\%i1) & 2 * 10^2 + 3 * 10^{-3}; \\ (\%o1) & \dfrac{200003}{1000} \end{array}$$

mientras que si escribimos

$$2.0 * 10^2 + 3 * 10^{-3}$$

obtendremos

$$\begin{array}{ll} (\%i2) & 2.0 * 10^2 + 3 * 10^{-3}; \\ (\%o2) & 200.003 \end{array}$$

Como vemos, en la primera obtenemos una fracción, mientras en la segunda obtenemos un número decimal. Pero las diferencias van más allá de esta apariencia: en la primera el programa ha trabajado con precisión infinita y el resultado que presenta es exacto. En la segunda se ha trabajado (el programa lo hará automáticamente al detectar un número decimal, 2.0 en este caso) con precición finita y por lo tanto con errores de redondeo. Estos errores no afectan a esta operación, pero sí lo hacen a la operación

$$(1/10)\hat{\ }4,$$

que en precisión infinita se obtiene

$$(\%i1)\quad (1/10)\hat{}4;$$
$$(\%o1)\quad \frac{1}{10000}$$

mientras que en finita tenemos

$$(\%i2)\quad (1.0/10)\hat{}4;$$
$$(\%o2)\quad 1.0000000000000005\ 10^{-4}$$

La función **float** se puede utilizar para convertir un número en decimal de doble precisión, que es la que por defecto utiliza el programa. Así por ejemplo

$$(\%i3)\quad \mathrm{float}((1/10)\hat{}4);$$
$$(\%o3)\quad 1.0\ \ 10^{-4}$$

Igualmente la operación

$$(\%i4)\ 2\hat{}100;$$
$$(\%o4)\ 1267650600228229401496703205376$$

pero si escribimos

$$(\%i5)\ \mathrm{float}(2\hat{}100);$$
$$(\%o5)\ 1.2676506002282294\ 10^{30}$$

Los números de la forma 3.05×10^{-3} en coma flotante pueden expresarse escribiendo el exponente como "f", "d" o "e". Por ejemplo

$$3.05 \times 10^{-3},\ 3.05e^{-3},\ 3.05d^{-3},\ 3.05f^{-3}$$

Para saber si el programa está trabajando en precisión finita o infinita tenemos la sentencia **numer**. Esta sentencia, si la ejecutamos nos devuelve el valor por defecto **false**, lo que significa que el programa está trabajando en precisión infinita. Si introducimos

$$(\%i6)\ \mathrm{numer{:}true};$$
$$(\%o6)\ true$$

pasamos a trabajar con precisión finita. Para activar la precisión infinita debemos teclear

$$(\%i7)\ \mathrm{numer{:}false};$$
$$(\%o7)\ false$$

1.1 Sobre las constantes

Las principales constantes matemáticas elementales se teclean en Maxima del siguiente modo

$$
\begin{aligned}
\%e- &> e \approx 2.718281828459045d0 \\
\%i- &> \sqrt{-1} \\
ind\ o\ und- &> \text{Representa un valor indeterminado} \\
\inf - &> +\infty \\
\min f- &> -\infty \\
\%phi- &> \frac{1+\sqrt{5}}{2}\ \text{(razón aúrea)} \\
\%pi- &> \pi \approx 3.141592653589793d0
\end{aligned}
$$

Aparte de estas constantes, pueden declarar otras que se puedan necesitar en un momento dado. Por ejemplo, si queremos asignar la constante de la gravitación universal $G = 6.67 \times 10^{-11}$ debemos teclear

$$
\begin{array}{l}
(\%i1)\ G : 6.67 \times e - 11; \\
(\%o1)\ 6.67\ 10^{-11}
\end{array}
$$

Nótese que usamos : en vez del símbolo de igualdad =. Si tecleamos G y pulsamos shift +enter obtendremos en pantalla

$$
\begin{array}{l}
(\%i2)\ G; \\
(\%o2)\ 6.67\ 10^{-11}
\end{array}
$$

Maxima distingue entre mayúsculas y minúsculas por lo que si escribimos g, esta no es igual a G. Para eliminar el valor asignado a G tenemos la función **kill**. Tecleando

$$
\begin{array}{l}
(\%i3)\ kill(G); \\
(\%o3)\ done
\end{array}
$$

desposeemos a G de su valor. Si tecleamos como antes obtenemos en pantalla

$$
\begin{array}{l}
(\%i4)\ G; \\
(\%o4)\ G
\end{array}
$$

dado que hemos borrado la variable de entre las definidas.

Por otra parte, si en una misma línea queremos definir varias variables, o escribir varias expresiones debemos separar estas con ";". Por ejemplo

$$
\begin{aligned}
&(\%i5)\ x:1;y:2;z:x+y\\
&(\%o5)\ 1\\
&(\%o6)\ 2\\
&(\%o7)\ 3
\end{aligned}
$$

que como vemos proporciona 3 salidas. Si queremos borrar todos estas variables declearemos

$$
\begin{aligned}
&(\%i8)\ kill(all);\\
&(\%o8)\ done
\end{aligned}
$$

Si no deseamos escribir la variable en una salida basta escribir un "$" al final. Por ejemplo

$$
\begin{aligned}
&(\%i1)\ x:1;y:2;z:x+y\$\\
&(\%o1)\ 1\\
&(\%o2)\ 2
\end{aligned}
$$

y no proporciona la tercera salida de la variable z como anteriormente ocurría.

1.2 Sobre las funciones

Una primera apreciación sobre las funciones en maxima es que estas van definidas en minúsculas con los argumentos entre paréntesis. Las nociones matemáticas más notables las presentamos en la siguiente tabla:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{sqrt}(x) &= \sqrt{x} \\
\exp(x) &= e^x \\
\log(x) &= \log x \\
\sin(x) &= \sin x \\
\cos(x) &= \cos x \\
\tan(x) &= \tan x \\
\mathrm{asin}(x) &= \arcsin x \\
\mathrm{acos}(x) &= \arccos x \\
\mathrm{atan}(x) &= \arctan x \\
n! &= factorial\ de\ n \\
\mathrm{abs}(x) &= |x| \\
\mathrm{entier}(x) &= parte\ entera\ de\ x
\end{aligned}
$$

Así, si escribimos

(%i1) sqrt(16);
(%o1) 4
(%i2) Sqrt(2);
(%o2) $\sqrt{2}$
(%i3) float(sqrt(2));
(%o3) 1.414213562373095

Actividad 2 *Calcular los siguientes valores:*

(a) $\sin \pi/4 + \cos \pi/7 =$

(b) $\log_2 256 =$

(c) $\left|\arcsin 0.98 + \frac{\log 2}{\sqrt{2}}\right| =$

(d) $e^{10!} =$

(e) $\sqrt{\log 34 + e^{12}} =$

Aparte de las funciones que Maxima tenga integradas, podemos introducir nuevas funciones con la sentencia **define**. Su estructura es

$$define(f(x\_1, ..., x\_n), expr),$$

que definirá una función de nombre f dependiente de las variables $x\_1, ..., x\_n$ según la expresión $expr$, que puede ser escalar o vectorial. Por ejemplo, si queremos definir la función $f(x,y) = xy$, escribimos

$$(\%i1)\ define(f(x,y), x*y);$$
$$(\%o1)\ f(x,y) := x*y$$

con lo que la función estará introducida. Si ahora tecleamos

$$(\%i2)\ f(2,3);$$
$$(\%o2)\ 6$$

Las funciones también pueden definirse de una forma más cómoda con la expresión

$$(\%i3)\ f(x,y) := x*y$$

1.3 Aprovechando cálculos anteriores

A veces, es posible que tengamos que hacer una sucesión de cálculos consecutivos de manera que cada nueva operación se basa en la anterior. Parece necesaria entonces algo que nos remita a resultados anteriores. Esto se realiza con maxima simplemente llamando a la entrada o salida correspondiente anteponiendo siempre el símbolo %. Por ejemplo, si queremos calcular $\cos(\sin \pi/7)$ tendríamos que calcular primero $\sin \pi/7$, para despues calcular el coseno de dicha cantidad. Esta operación podríamos hacerla del modo siguiente:

$$(\%i1)\ \sin(\%pi/7);$$
$$(\%o1)\ \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$$
$$(\%i2)\ \cos(\%o1)$$
$$(\%o2)\ \cos\left(\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)$$
$$(\%i3)\ \text{float}(\%o2)$$
$$(\%o3)\ 0.90733988115078$$

Obviamente, este ejemplo es bastante sencillo ya que la operación en cuestión podría haberse hecho en una sola línea de comandos, pero ilustra bien el modo de proceder cuando se estén realizando operaciones y cálculos más complejos. Finalmente, para llamar a la salida anterior basta usar el símolo %. Así, la operación anterior podría haberse escrito como

$$
\begin{aligned}
&(\%i1)\ \sin(\%pi/7);\\
&(\%o1)\ \ \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\\
&(\%i2)\ \cos(\%)\\
&(\%o2)\ \ \cos\left(\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)\\
&(\%i3)\ \ \mathrm{float}(\%)\\
&(\%o3)\ 0.90733988115078
\end{aligned}
$$

Chapter 2

Integración con Maxima

2.1 Cálculo de primitivas e integral definida

Maxima también posee sentencias para calcular primitivas de funciones de una variable. El comando que se utiliza para calcular la primitiva de una función $f(x)$ es $integrate(f, x)$, indicando la variable respecto la cual se integra. Por ejemplo, para calcular una primitiva de $f(x) = \sin x$ procedemos del siguiente modo.

$$(\%i1) \ \text{integrate}(\sin(x), x);$$
$$(\%o1) \ -\cos(x)$$

Si lo que pretendemos es calcular la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$, el comando que debemos usar es $integrate(f, x, a, b)$. Entonces $\int_0^1 xdx$ se calcularía del modo siguiente.

$$(\%i2) \ \text{integrate}(x, x, 0, 1);$$
$$(\%o2) \ \frac{1}{2}$$

Actividad 3 *Calcular las primitivas de las siguientes funciones:*

(a) $f(x) = \cos x \sin 2x \cos 3x$

(b) $f(x) = \frac{x+x^2}{1+x^3}$

(c) $f(x) = e^{10x} \cos x$

(d) $f(x) = e^{5x}(x\hat{}2+1)\sin x$

Actividad 4 *Calcular para cada una de las funciones del ejercicio 3 la integral* $\int_0^1 f(x)\,dx$ *dando el resultado exacto y con cifras decimales.*

2.2 Integración múltiple con Maxima

Utilizando el comando integrate repetidas veces podemos hacer cálculos de integrales dobles y triples. Solo hay que tener en cuenta el orden de las variables al hacer la integración. Aunque el orden da igual al integrar sobre rectángulos o prismas regulares, para otros conjuntos más complejos el orden en que se integra hace puede hacer los cálculos más sencillos. Veamos algunos ejemplos de ésto. Por ejemplo para calcular

$$\int\int_{[0,1]\times[0,3]} xydxdy$$

bastará teclear

(%i1) integrate(integrate(x*y,x,0,1),y,0,3)

y obtenemos

$$(\%o1)\ \frac{9}{4}.$$

Nótese que si tuviéramos activada la sentence numer:true, obtendríamos en valor aproximado 2.25.

El ejemplo anterior es bastante sencillo al tratarse de un rectángulo. Se hubiera obtenido el mismo resultado cambiando el orden de integración tecleando

integrate(integrate(x*y,x,0,3),y,0,1)

Démonos cuenta que si tecleamos simplemente

(%i1) integrate(x*y,x,0,3)

obtenemos el resultado

$$(\%o1)\ \frac{y}{2},$$

ya que estamos integrando sólo respecto de la variable x considerando y como una constante.

Lo mismo ocurrirá con la integración en tres variables, por ejemplo al integrar

$$\int\int\int_{[0,1]\times[0,3]\times[-1,1]} xyzdxdydz,$$

donde habrá que teclear

(%i1) integrate(integrate(integrate(x*y*z,x,0,1),y,0,3),z,-1,1)

para obtener el resultado

(%o1) 0.

Actividad 5 *Calcular las siguientes integrales dobles y triples:*

(a) $\int\int_{[1,2]\times[-4,8]}(x^2+2xy)dxdy.$

(b) $\int\int_{[0,1]\times[0,2\pi]} e^x \sin y dxdy.$

(c) $\int\int\int_{[0,1]\times[0,2\pi]\times[-1,1]}(e^x\sin(y)+z^2)dxdydz.$

(d) $\int\int\int_{[0,1]\times[0,2\pi]\times[-1,1]}(x+y^2+yz^2)dxdydz$

Con recintos más complicados hay que tenemos mucho más cuidado a la hora de indicar qué variables son las primeras que debemos de utilizar para hacer la integración. Por ejemplo, calculemos

$$\int\int_\Omega y^2dxdy$$

donde $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\}$, que como sabemos se trata de un círculo de radio uno. Aquí, debemos de tener en cuenta que el recinto puede ser descrito como

$$-1\leq x\leq 1$$
$$-\sqrt{1-x^2}\leq y\leq\sqrt{1-x^2}$$

y si lo describimos así debemos teclear en Maxima

(%i1) integrate(integrate(y^2,y,-sqrt(1-x^2),sqrt(1-x^2)),x,-1,1)

cuyo resulstado nos da

$$(\%o1)\frac{\pi}{4}.$$

Este mismo problema podría haberse resuelto tomando

$$-1 \leq y \leq 1$$

$$-\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}$$

y tecleando en Maxima

integrate(integrate(y^2,x,-sqrt(1-y^2),sqrt(1-y^2)),y,-1,1)

obteniendo el mismo resultado. También, al tratarse de un recinto circular podríamos haber hecho el problema pasando a coordenadas polares (r, θ), es decir,

$$\int\int_{\Omega} y^2 dxdy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^3 \sin^2 \theta d\theta dr.$$

Teclearíamos entonces en Maxima

integrate(integrate(r^3*sin(t)^2,t,0,2 $*$ %pi),r,0,1)

para obtener de nuevo el resultado $\pi/4$ anterior.

El proceso cuando se tiene integral triple es análogo, sólo hay que añadir una vez la sentencia integrate para la tercera variable que vamos a introducir.

Actividad 6 *Calcular las integrales dobles siguientes en los recintos que se indican:*

(a) $\int\int_{\Omega} y dxdy$ *en* $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(b) $\int\int_{\Omega} (3y^3 + x^2) dxdy$ *en* $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(c) $\int\int_{\Omega} \sqrt{xy} dxdy$ *en* $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1,\ y^2 \leq x \leq y\}$. *(Nota: aqui el programa hará una pregunta antes de dar la solucion).*

(d) $\int\int_{\Omega} y e^x dxdy$ *en* $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, \_0 \leq x \leq y^2\}$.

(e) $\int\int_{\Omega} y + \log x dxdy$ *en* $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1/2 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq x\}$.

Actividad 7 *Calcular las integrales que a continuación se piden en los recintos correspondientes:*

(a) $\iiint_\Omega yxz dxdydz$ *en* $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -5 \le z \le y^2 + x,\ -1 \le x, y \le 1\}$.

(b) $\iiint_\Omega (y \sin z + x) dxdydz$ *en* $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \ge z \ge y^2,\ 0 \le x, y \le 1\}$.

(c) $\iiint_\Omega x dxdydz$ *en* $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \ge y^2 + x^2,\ 0 \le z \le 1\}$.

(d) $\iiint_\Omega (y^2 + z + x) dxdydz$ *en* $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.
Nota: pasar a coordenadas esféricas.

Chapter 3

Representación gráfica de funciones, curvas y superficies

Maxima permite hacer representaciones gráficas de funciones de una y varias variables, así como de superficies parametrizadas. Vamos a ver en esta notas cómo puede hacerse.

3.1 Gráficas unidimensionales

Dentro de las gráficas unidimensionales, tenemos que distinguir entre las gráficas de funciones reales de variable real, y las gráficas de curvas en dos y tres dimensiones.

Para representar funciones reales de variable real, tenemos el comando **plot2d**, al que habrá que introducirle la función que deseamos representar así como la variable independiente y el dominio de ésta de forma [var,liminf,limsup]. Así, para representar la función $f(x) = \sin x$ en el dominio $[0, 2\pi]$ escribimos

$$(\%i1)\ \mathrm{plot2d}(\sin(x), [x, 0, 2 * \%pi]);$$
$$(\%o1)$$

Al ejecutarlo nos saldrá una nueva ventana con la gráfica en cuestión, pues se utiliza un programa externo a maxima llamado Gnuplot. Esta gráfica podemos guardarla en extensión "emf".

Es preciso hacer aquí un aclaración porque en general todos los comandos gráficos también prueden escribirse añadiendo las letras “wx". Por ejemplo, si tecleamos

$$\mathrm{wxplot2d}(\sin(x), [x, 0, 2 * \%pi])$$

obtenemos la misma gráfica en la pantalla en la que estamos trabajando. No obstante, estas gráficas no se pueden modificar, mientras que si llamamos al programa Gnuplot, es decir, sin escribir wx delante sí es posible realizar cambios en la gráfica que hemos generado.

Si queremos representar varias funciones a la vez, hemos de escribir

$$\begin{array}{l} (\%i2)\ \mathrm{plot2d}([\sin(x), \sin(2 * x)], [x, 0, 2 * \%pi]); \\ (\%o2) \end{array}$$

expresión que hará una representación gráfica simultánea de las funciones $\sin x$ y $\sin 2x$. Si queremos indicar cual será el rango de representación de las funciones, teclearemos

$$\begin{array}{l} (\%i3)\ \mathrm{plot2d}([\sin(x), \sin(2 * x)], [x, 0, 2 * \%pi], [y, 0, 1]); \\ (\%o3) \end{array}$$

que nos dará la representación de las funciones entre 0 y 1, no representando nada cuándo la imagen se halle fuera de dicho intervalo.

Actividad 8 *Representar gráficamente las siguientes funciones de una variable:*

(a) $f(x) = \frac{1+x}{1-x^2}$ *en el dominio* $[-2, 2]$.

(b) $f(x) = e^{x^2} \frac{1+x}{1-x^2}$ *en el dominio* $[-2, 2]$.

(c) $f(x) = \sin\left(\frac{1+x}{1-x^2}\right)$ *en el dominio* $[-2, 2]$.

(d) $f(x) = e^{x \cos x}$ *en el dominio* $[-5, 5]$.

(e) $f(x) = \frac{e^x}{\cos x}$ *en el dominio* $[-\pi, \pi]$.

La sentencia plot2d admite distintos tipos de sentencias que al ser introducidas justo despues de la misma, permite hacer diferentes gráficos unidimensionales. Así, el comando empleado para representar curvas parametrizadas en el plano es plot2d, añadiendole la opción **parametric**, e indicándole el número de puntos que vamos a usar en la representación que introducimos con la expresion **nticks**. Por ejemplo, para representar la curva $\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \sin 2t \end{cases}$ en el dominio $[0, 2\pi]$ debemos teclear

$$(\%i1)\ \mathrm{plot2d}([parametric, \sin(t), \sin(2*t), [t, 0, 2*\%pi], [nticks, 1000]])\$$$

que nos dará la representación deseada con una malla de 1000 puntos. Al aumentar el número de puntos mejoramos la representación pero aumentamos el tamaño del fichero y el tiempo de computación.

Actividad 9 *Representar gráficamente las siguientes curvas en el plano.*

(a) $\begin{cases} x(t) = \cos 2t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$ *en el dominio* $[0, 2\pi]$.

(b) $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{t} \\ y(t) = t^2 \end{cases}$ *en el dominio* $[-1, 1]$.

(c) $\begin{cases} x(t) = t^3 \\ y(t) = \sqrt{t} \end{cases}$ *en el dominio* $[0, 2]$.

(d) $\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t \end{cases}$ *en el dominio* $[0, 2]$.

(e) $\begin{cases} x(t) = \cos t^2 \\ y(t) = \sin t^2 \\ z(t) = \sqrt{t} \end{cases}$ *en el dominio* $[0, 2\pi]$.

3.1.1 El paquete draw

La sentencia **plot2d** en su forma paramétrica permite la representación de curvas planas, pero no es posible representar curvas en tres dimensiones. Para esto, y para mucho más, disponemos del paquete **draw**, que previamente debemos cargar usando la sentencia

$$\mathrm{load(draw)}$$

o

$$\mathrm{load(draw)\$}$$

si no queremos que nos escriba nada a continuación. Como una primera aproximación, este paquete dispone de las sentencias **draw2d** para representar curvas planas, y **draw3d** para representar curvas en tres dimensiones. La sintaxis es un poco distinta a la de **plot2d**. A modo de ejemplo dibujamos una circunferencia

draw2d(nticks=1000,parametric(cos(t),sin(t),t,0,2*%pi))

o bien una hélice

draw3d(nticks=1000,parametric(cos(t),sin(t),10*t,t,0,10*%pi))

Actividad 10 *Representar gráficamente las siguientes curvas en el plano y el espacio utilizando el paquete draw.*

(a) $\begin{cases} x(t) = \cos 2t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$ *en el dominio* $[0, 2\pi]$.

(b) $\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = t^2 \end{cases}$ *en el dominio* $[-1, 1]$.

(c) $\begin{cases} x(t) = t^3 \\ y(t) = \sqrt{t} \end{cases}$ *en el dominio* $[0, 2]$.

(d) $\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t \end{cases}$ *en el dominio* $[0, 2]$.

(e) $\begin{cases} x(t) = \cos t^2 \\ y(t) = \sin t^2 \\ z(t) = \sqrt{t} \end{cases}$ *en el dominio* $[0, 2\pi]$.

(f) $\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \cos t + \log(\tan \frac{t}{2}) \end{cases}$ *en el dominio* $[0, \pi]$ *(**Tractriz**).*

(g) $\begin{cases} x(t) = \dfrac{3t}{1+t^3} \\ y(t) = \dfrac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$ *en el dominio* $[-50, 50]$ *(**Folium de Descartes**).*

(h) $\begin{cases} x(t) = e^{t/20} \cos t \\ y(t) = e^{t/20} \sin t \\ z(t) = \sqrt{4t} \end{cases}$ *en el dominio* $[0, 10\pi]$.

(i) $\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t \\ z(t) = \sqrt{t} \end{cases}$ *en el dominio* $[0,2]$.

(j) $\begin{cases} x(t) = e^{t/20}\cos t \\ y(t) = e^{t/20}\sin t \end{cases}$ *en el dominio* $[0,10\pi]$ *(**Espiral logarítmica**).*

3.2 Gráficas de superficies

La representación gráfica de funciones de dos variables se hace mediante el comando **plot3d**. Por ejemplo, si queremos representar la función $f(x,y) = \sin(xy)$ en el dominio $[0,3] \times [0,3]$ hemos de escribir

$$(\%i4)\ \mathrm{plot3d}(\sin(x*y),[x,0,3],[y,0,3]);$$
$$(\%o4)$$

pero si queremos representar varias funciones a la vez, debemos escribir (nótese la diferencia con la sentencia plot2d anterior)

$$(\%i5)\ \mathrm{plot3d}([\sin(x*y),x-y,[x,0,3],[y,0,3]]);$$
$$(\%o5)$$

que realizará la representación gráfica conjunta de las funciones $\sin(xy)$ y $x-y$ en el dominio $[0,3]^2$. Al igual que en el caso bidimensional, podemos elegir el rango en el que queremos hacer la representación gráfica.

Para la representación de curvas de nivel de funciones reales del plano tenemos la sentencia **contour_plot**, cuya sintaxis es idéntica a plot3d. Si tecleamos

$$(\%i6)\ contour\_plot(\sin(x*y),[x,0,3],[y,0,3]);$$
$$(\%o6)$$

obtenemos las curvas de nivel de la función $\sin(xy)$.

Existen numerosas alternativas y opciones para la representación gráfica según sean nuestras necesidades. Estas pueden consultarse en el menú de ayuda del programa.

Actividad 11 *Representar gráficamente las siguientes funciones de varias variables, así como sus curvas de nivel:*

(a) $f(x,y) = \log(x^2+y^2)$ *en el dominio* $[-2,2]\times[-2,2]$.

(b) $f(x,y) = x^2+y^2$ *en el dominio* $[-2,2]\times[-2,2]$.

(c) $f(x,y) = e^{\frac{1}{x^2+y^2}}$ *en el dominio* $[-2,2]\times[-2,2]$.

(d) $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$ *en el dominio* $[-1,1]\times[-1,1]$.

El programa también es capaz de hacer representaciones gráficas de superficies regulares dadas por parametrizaciones con dos parámetros. Para ello, de nuevo debemos cargar el paquete **draw**. Recordemos que para ello debemos teclear

load(draw)$

A continuación podemos utilizaar la sentencia **draw3d** tanto para representar funciones como superficies. Veamos algunos ejemplos. Tecleando

$$\text{draw3d(explicit(sin}(x*y), x, 0, 3, y, 0, 3));$$

obtenemos la gráfica del principio de esta sección.

Actividad 12 *Representar gráficamente las siguientes funciones de varias variables utilizando el paquete draw:*

(a) $f(x,y) = \log(x^2+y^2)$ *en el dominio* $[-2,2]\times[-2,2]$.

(b) $f(x,y) = x^2+y^2$ *en el dominio* $[-2,2]\times[-2,2]$.

(c) $f(x,y) = e^{\frac{1}{x^2+y^2}}$ *en el dominio* $[-2,2]\times[-2,2]$.

(d) $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$ *en el dominio* $[-1,1]\times[-1,1]$.

Supongamos que ahora queramos representar la esfera $x^2+y^2+z^2=1$ que tiene por parametrización

$$\left\{\begin{array}{l} x=\cos u\sin v,\\ y=\sin u\sin v,\\ z=\cos v, \end{array}\right. \quad u\in[0,2\pi],\ v\in[0,\pi].$$

Tecleamos entonces

draw3d(parametric_surface(cos(u)*sin(v),sin(u)*sin(v),cos(v),u,0,2*%pi,v,0,%pi))

obteniendo la gráfica pedida.

Actividad 13 *Representar gráficamente las siguientes superficies:*

(a) $\begin{cases} x(u,v) = \sin u \\ y(u,v) = \cos u \\ z(u,v) = v \end{cases}$ *en el dominio* $[0,2\pi] \times [0,4]$ *(**Cilindro**).*

(b) $\begin{cases} x(u,v) = \cos u\,(3+\cos v) \\ y(u,v) = \sin u\,(3+\cos v) \\ z(u,v) = \sin v \end{cases}$ *en el dominio* $[0,2\pi] \times [0,2\pi]$ *(**Toro**).*

(c) $\begin{cases} x(u,v) = \cos u \sin v \\ y(u,v) = \sin u \sin v \\ z(u,v) = \cos v \end{cases}$ *en el dominio* $[0,2\pi] \times [0,\pi]$ *(**Esfera**).*

(d) $\begin{cases} x(u,v) = v \sin u \\ y(u,v) = v \cos u \\ z(u,v) = u/3 \end{cases}$ *en el dominio* $[0,4\pi] \times [-1,1]$ *(**Helicoide**).*

(e) $\begin{cases} x(u,v) = u \\ y(u,v) = v^2 \\ z(u,v) = \sin(uv) \end{cases}$ *en el dominio* $[0,3] \times [0,3]$.

(f) $\begin{cases} x(u,v) = u \\ y(u,v) = v \\ z(u,v) = u^3 - 3v^2 u \end{cases}$ *en el dominio* $[-1,1]\times[-1,1]$ *(**Silla de mono**).*

(g) $\begin{cases} x(u,v) = \cosh v \cos u \\ y(u,v) = \cosh v \sin u \\ z(u,v) = v \end{cases}$ *en el dominio* $[0,2\pi] \times [-2,2]$ *(**Catenoide**).*

(h) $\begin{cases} x(u,v) = (2 - v\sin\frac{u}{2})\sin u \\ y(u,v) = (2 - v\sin\frac{u}{2})\cos u \\ z(u,v) = v\cos\frac{u}{2} \end{cases}$ *en el dominio* $[0,2\pi] \times [-1,1]$ *(**Banda de Möebius**).*

Chapter 4

Series de Fourier y Ecuaciones en Derivadas Parciales

4.1 Series de Fourier

Maxima tiene varias sentencias para calcular las series de Fourier de funciones periódicas disponibles en el paquete **fourie**. Para usarlas, previamente hemos de cargar dicho paquete tecleando

$$load(fourie),$$

que al introducirlo nos dará una sentencia indicándonos que el paquete ha sido cargado.

Una vez cargado, si suponemos que $f(t)$ es una función $2T$-periódica, la sentencia

fourier(f(t),t,T)

nos devuelve una lista con los coeficientes de Fourier de dicha función, es decir nos da

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos(k\pi t/T)+b_k\sin(k\pi t/T)]$$

donde

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(t)\cos(k\pi t/T)dt, \\ b_k &= \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(t)\sin(k\pi t/T)dt. \end{aligned}$$

Por ejemplo

$$(\%i1)\text{fourier(t+t\^{}2,t,2)}$$

nos da la salida

$$(\%t1)\ a_0 = \frac{4}{3}$$

$$(\%t2)\ a_n = \frac{\frac{16\sin(\pi n)}{\pi n} - \frac{32\sin(\pi n)}{\pi^3 n^3} + \frac{32\cos(\pi n)}{\pi^2 n^2}}{2}$$

$$(\%t3)\ b_n = \frac{\frac{8\sin(\pi n)}{\pi^2 n^2} - \frac{8\cos(\pi n)}{\pi n}}{2}$$

$$(\%o3)\ [\%t1, \%t2, \%t3]$$

que se corresponde con los coeficientes de Fourier de la mencionada función. Como vemos, puede ser útil disponer de sentencias que simplifiquen los coeficientes $\sin(n\%pi) = 0$ y $\cos(n\%pi) = (-1)^n$. Para ello tenemos la sentencia **foursimp**(expresion) que simplifica $sin(n\%pi)$ a 0 si **sinnpiflag** vale true y $cos(n\%pi)$ a $(-1)^n$ si **cosnpiflag** vale true. Las variables **sinnpiflag** y **cosnpiflag** son por tanto opcionales y valen **true** por defecto. Así, si tecleamos

$$(\%i4)\ \text{foursimp(fourier(t+t\^{}2,t,2))}$$

nos devuelve las salidas anteriores y sus simplificaciones

$$(\%t4)\ a_0 = \frac{4}{3}$$

$$(\%t5)\ a_n = \frac{\frac{16\sin(\pi n)}{\pi n} - \frac{32\sin(\pi n)}{\pi^3 n^3} + \frac{32\cos(\pi n)}{\pi^2 n^2}}{2}$$

$$(\%t6)\ b_n = \frac{\frac{8\sin(\pi n)}{\pi^2 n^2} - \frac{8\cos(\pi n)}{\pi n}}{2}$$

$$(\%t7)\ a_0 = \frac{2^2}{3}$$

$$(\%t8)\ a_n = \frac{16(-1)^n}{\pi^2 n^2}$$

$$(\%t9)\ b_n = -\frac{4(-1)^n}{\pi n}$$

$$(\%o9)\ [\%t7, \%t8, \%t9]$$

Como sabemos, las series de Fourier tienen una forma especial para el caso de funciones pares o impares, ya que en estos casos los coeficientes del seno o coseno se hacen nulos. Supongamos una función $f(t)$ definida en $[0, T]$ a la que extendemos de forma par en $[-T, T]$ y $2T$–periódica a toda la recta real. Dicha función solo tendrá coeficientes coseno no nulos y su serie la obtenemos como

fourcos(f(t),t,T),

y cuyos coeficientes se tienen la expresión

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(kt)dt,$$

Si la extensión de $f(t)$ a $[-T, 0]$ es impar, la serie sólo tendrá coeficientes seno que se calculan con la sentencia

foursin(f(t),t,T),

con coeficientes

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(kt)dt.$$

Por ejemplo

(%i10) foursimp(fourcos(t+t^2,t,2))

nos devuelve la salida

$$(\%t10)\ a_0 = \frac{7}{3}$$

$$(\%t11)\ a_n = \frac{12\sin(\pi n)}{\pi n} - \frac{16\sin(\pi n)}{\pi^3 n^3} + \frac{20\cos(\pi n)}{\pi^2 n^2} - \frac{4}{\pi^2 n^2}$$

$$(\%t12)\ a_0 = \frac{7}{3}$$

$$(\%t12)\ a_n = \frac{4\,(5(-1)^n - 1)}{\pi^2 n^2}$$

$$(\%o12)\ [\%t11, \%t12] \tag{4.1}$$

mientras que

(%i13) foursimp(foursin(t+t^2,t,2))

produce la respuesta

$$(\%t13)\ b_n = \frac{20\sin(\pi n)}{\pi^2 n^2} - \frac{12\cos(\pi n)}{\pi n} + \frac{16\cos(\pi n)}{\pi^3 n^3} - \frac{16}{\pi^3 n^3}$$

$$(\%t14)\ b_n = -\frac{4\left(3\pi^2 n^2(-1)^n - 4(-1)^n + 4\right)}{\pi^3 n^3}$$

$$(\%o14)\ [\%t14]$$

Démonos cuenta de que fouriersin(t^2,t,%pi) no es el desarrollo de t^2 como una función definida en $[-\pi,\pi]$ sino de la extensión 2π–periódica de la función impar

$$f(t) = \begin{cases} -t^2 & t \in [-1,0], \\ t^2 & t \in [0,1]. \end{cases}$$

Si tenemos los coeficientes de Fourier de una cierta función $2T$–periódica hasta un cierto valor n (pudiendo ser ∞, esto es **inf**), podemos construir su serie de Fourier, o mejor dicho, una aproximación de esta con la sentencia **fourexpand** que tiene la sintaxis

fourexpand(lista,t,T,n),

donde lista es un conjunto de coeficientes de Fourier que previamente habremos calculado. Así, por ejemplo, podemos construir los desarrollos en series de Fourier de los ejemplos anteriores hasta orden 5 tecleando

$$(\%i15)\ l : \text{fourier(t+t\^{}2,t,2)}$$

$$(\%t15)\ a_0 = \frac{4}{3}$$

$$(\%t16)\ a_n = \frac{\frac{16\sin(\pi n)}{\pi n} - \frac{32\sin(\pi n)}{\pi^3 n^3} + \frac{32\cos(\pi n)}{\pi^2 n^2}}{2}$$

$$(\%t17)\ b_n = \frac{\frac{8\sin(\pi n)}{\pi^2 n^2} - \frac{8\cos(\pi n)}{\pi n}}{2}$$

$$(\%o17)\ [\%t1, \%t2, \%t3]$$

$$(\%i18)\ \text{fourexpand(l,t,2,2)}$$

$$(\%o18)\ \frac{2\sin(\pi t)}{\pi} + \frac{4\cos(\pi t)}{\pi^2} + \frac{\sin(\frac{\pi t}{2})}{\pi} - \frac{16\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{\pi^2} + \frac{4}{3}$$

o

$$(\%i19)\ \text{fourexpand(l,t,2,inf)}$$

$$(\%o19)\ -\frac{4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\left(\frac{\pi n t}{2}\right)}{n}}{\pi} + \frac{16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\left(\frac{\pi n t}{2}\right)}{n^2}}{\pi^2} + \frac{4}{3}$$

Esta operación puede hacerse automáticamante con la sentencia **totalfourier** cuya sintaxis es

totalfourier(f,x,T)

y que devuelve la serie de Fourier completa esto es

$$\mathbf{fourexpand}(\mathbf{foursimp}(\mathbf{fourier}(\mathbf{f},\mathbf{x},\mathbf{p})),\mathbf{x},\mathbf{p},{}^{\prime}\mathbf{inf})$$

Por ejemplo si tecleamos

(%i20) totalfourier(t+t^2,t,2)

obtenemos

$$(\%t20)\ a_0 = \frac{4}{3}$$

$$(\%t21)\ a_n = \frac{\frac{16\sin(\pi n)}{\pi n} - \frac{32\sin(\pi n)}{\pi^3 n^3} + \frac{32\cos(\pi n)}{\pi^2 n^2}}{2}$$

$$(\%t22)\ b_n = \frac{\frac{8\sin(\pi n)}{\pi^2 n^2} - \frac{8\cos(\pi n)}{\pi n}}{2}$$

$$(\%t23)\ a_0 = \frac{2^2}{3}$$

$$(\%t24)\ a_n = \frac{16(-1)^n}{\pi^2 n^2}$$

$$(\%t25)\ b_n = -\frac{4(-1)^n}{\pi n}$$

$$(\%o25)\quad -\frac{4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\left(\frac{\pi n t}{2}\right)}{n}}{\pi} + \frac{16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\left(\frac{\pi n t}{2}\right)}{n^2}}{\pi^2} + \frac{4}{3}$$

Actividad 14 *Obtener los desarrollos de Fourier y de seno y coseno de orden 10 e infinito de las funciones siguientes:*

(a) $\cos t$ *definida en* $[0,\pi]$.

(b) $\sin(2t)$ *definida en* $[0,\pi]$.

(c) t^3 *definida en* $[0,1]$.

(d) $e^t t$ *definida en* $[0,6]$.

(e) $\cos t$ *definida en* $[0, 2\pi]$.

Actividad 15 *Los extremos de una barra de cobre* ($\alpha^2 = 1.14$) *de longitud 2 metros se mantienen a temperatura de* 0^oC. *Encontrar la expresión de la temperatura de la barra para las siguientes condiciones iniciales*

(a) $u(0, y) = 65\cos^2(\pi y)$, $0 \leq y \leq 2$.

(b) $u(0, y) = 70 \sin y$, $0 \leq y \leq 2$.

(c) $u(0, y) = y$, $0 \leq y \leq 2$.

Nota: *Tomar desarrollos en serie de Fourier de orden 5 y 10 y representar la solución gráficamente.*

4.2 Sobre funciones continuas a trozos

Todo lo que hemos visto anteriormente no funciona si tenemos una función continua a trozos como por ejemplo

$$f(t) = \begin{cases} t & t \in [-2, 0), \\ 1 - t & t \in [0, 2]. \end{cases}$$

Si deseamos calcular los coeficientes de Fourier, debemos calcular las integrales que las definen directamente. Así, los coeficientes de la función anterior los calculamos como

integrate(t,t,-2,0)+integrate((1-t),t,0,2)

que da el valor

$$-2$$

foursimp(integrate(t*cos(n*%pi*t/2),t,-2,0)+integrate((1-t)*cos(n*%pi*t/2),t,0,2));

que nos da

$$-\frac{8\left((-1)^n - 1\right)}{\pi^2 n^2}$$

foursimp(integrate(t*sin(n*%pi*t/2),t,-2,0)+integrate((1-t)*sin(n*%pi*t/2),t,0,2));

que nos daría

$$-\frac{2\left((-1)^n - 1\right)}{\pi n}$$

por lo que la serie de Fourier es

$$-1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{4\left((-1)^n-1\right)}{\pi^2 n^2}\cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)-\frac{(-1)^n-1}{\pi n}\sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right)\right]$$

Actividad 16 *Encontrar los desarrollos en serie de Fourier de orden 10 de las siguientes funciones periódicas (se da su valor en el intervalo $[-L, L]$ con $2L$ el periodo).*

(a) $f(x)=\begin{cases} -1 & x\in[-1,0), \\ 1 & x\in[0,1]. \end{cases}$

(b) $f(x)=\begin{cases} x & x\in[-2,0), \\ 0 & x\in[0,2]. \end{cases}$

(c) $f(x)=x,\ x\in[-1,1].$

(d) $f(x)=\begin{cases} -x & x\in[-1,0), \\ x & x\in[0,1]. \end{cases}$

(e) $f(x)=\begin{cases} 1 & x\in[-2,0), \\ 0 & x\in[0,1), \\ 1 & x\in[1,2]. \end{cases}$

Actividad 17 *Los extremos de una barra de cobre ($\alpha^2 = 1.14$) de longitud 2 metros se mantienen a temperatura de 0^oC. Encontrar la expresión de la temperatura de la barra para las siguientes condiciones iniciales*

(a) $u(0,y)=\begin{cases} 60x & x\in[0,1), \\ 60(2-x) & x\in[1,2]. \end{cases}$

(b) $u(0,y)=\begin{cases} 0 & x\in[0,1), \\ 75 & x\in[1,2]. \end{cases}$

Nota: *Tomar desarrollos en serie de Fourier de orden 5 y 10 y representar la solución gráficamente.*

Actividad 18 *Resolver el problema*

$$\begin{cases} u_{tt}=4u_{yy},\ t>0,\ y\in(0,3), \\ u(0,y)=f(y),\ 0<y<3, \\ u_t(0,y)=0,\ 0<y<3, \\ u(t,0)=0,\ u(t,3)=0,\ t>0. \end{cases}$$

donde $f(y) = \begin{cases} x & x \in [0,1), \\ 1 & x \in [1,2), \\ 2-x & x \in [2,3]. \end{cases}$

Nota: *Tomar desarrollos en serie de Fourier de orden 5 y 10 y representar la solución gráficamente.*