Grado en Ingeniería Mecánica
“Matemáticas II”
Curso 2012/13
Convocatoria de Febrero (24/01/13)

Indicaciones

- Los alumnos deberán responder a las cuestiones teóricas y a los **cuatro** problemas propuestos.
- En la primera hoja se indicará el nombre completo y el grupo.
- El examen aportará un **80%** de la nota final de la asignatura. El **20%** restante se obtendrá a partir de la valoración de las prácticas, de la realización de problemas y de la participación en clase.
- La duración del examen es de **3.5** horas.

Cuestiones teóricas

1. Dado el campo vectorial expresado en coordenadas cilíndricas

$$\mathbf{F}(r,\theta,z) = r^2\cos^2(\theta)\operatorname{sen}(\theta)\vec{e}_r - r^2\cos(\theta)\operatorname{sen}^2(\theta)\vec{e}_\theta + \left(r\operatorname{sen}(\theta)+\cos(z^2)\right)\vec{k}$$

donde $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k}\}$ es la base de vectores móviles de $\mathbb{R}^3$ asociada a dichas coordenadas:

(a) **(0.5 Ptos.)** Escribe el campo vectorial $\mathbf{F}$ en coordenadas cartesianas.

(b) **(0.5 Ptos.)** Determina el valor de la integral del campo vectorial $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ sobre el semielipsoide $\mathcal{S}$ (Figura 1) descrito por las ecuaciones

$$\mathcal{S} = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2 + \frac{y^2}{3} + z^2 = 1,\ y<0\right\}$$

2. **(1 Pto.)** La ecuación de ondas

$$\left.\begin{array}{ll} y_{tt}(t,x) = \alpha^2 y_{xx}(t,x), & t>0,\ x\in\mathbb{R} \\ y(0,x)=\phi(x),\quad y_t(0,x)=0, & x\in\mathbb{R}\end{array}\right\} \qquad (\mathcal{EO})$$

describe el desplazamiento vertical a lo largo del tiempo de una cuerda elástica que inicialmente está en reposo, de forma que $\phi(x)$ indica la diferencia inicial respecto de la horizontal en cada punto y $\alpha>0$ es una constante asociada a las características de la cuerda. Si ϕ es de clase C^2, comprueba que la función

$$y(t.x) = \frac{1}{2}\left(\phi(x+\alpha t)+\phi(x-\alpha t)\right)$$

es solución de $(\mathcal{EO})$.

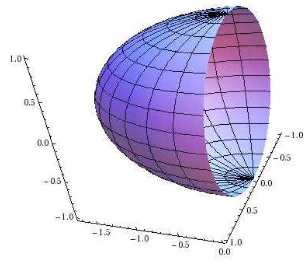

Figura 1: Superficie $\mathcal{S}$

Problemas

1. **(2 Ptos.)** Calcula la integral del campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y) = \left((1+x)y^2+\cos(x),\ \pi x - \log(1+y^2)\cos(y^4+3y)\right)$$

a lo largo de la curva γ parametrizada por la ecuación

$$\gamma(t) = \left(1+\frac{t}{2}\right)(\cos(t),\operatorname{sen}(t)),\quad 0\le t\le 2\pi$$

Justifica el procedimiento utilizado.

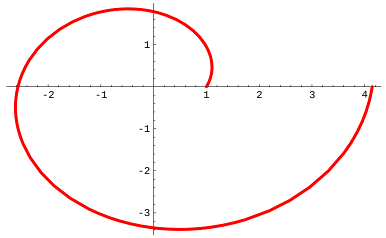

Figura 2: Curva γ

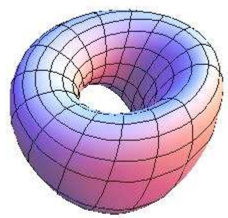

Figura 3: Superficie $\mathcal{A}$

2. **(2 Ptos.)** Sea la superficie $\mathcal{A}\subset\mathbb{R}^3$ descrita mediante la parametrización

$$\psi(\theta,\varphi) = \left((2+\cos(\varphi))\cos(\theta),\ (2+\cos(\varphi))\operatorname{sen}(\theta),\ (2+\cos(\theta))\operatorname{sen}(\varphi)\right),$$

con $0<\theta<2\pi$, $0<\varphi<2\pi$. Calcula la integral de superficie

$$\int_{\mathcal{A}^+}(x+z)\vec{k}\cdot dS$$

Sigue detrás ⇒

3. Dada la función $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida mediante la expresión

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x \le -1/2 \\ 2x+1, & -1/2 < x < 0 \\ 1/2, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

   (a) **(1 Pto.)** Calcula su serie de Fourier.

   (b) **(1 Pto.)** Estudia la convergencia puntual en el intervalo $[-1,1]$ de la sucesión de las sumas parciales de la serie de Fourier de f. Dibuja las gráficas de f y de la función límite puntual.

4. **(2 Ptos.)** La función $u(t,x)$ que porporciona la temperatura en el instante $t > 0$ en cada punto $x \in [0,1]$ de una barra unidimensional de longitud unidad aislada en los extremos y de forma que el calor se transmite únicamente por conducción, es solución del problema

$$\left.\begin{array}{ll} u_t(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x), & t > 0,\ 0 < x < 1 \\ u_x(t,0) = u_x(t,1) = 0, & t > 0 \end{array}\right\} \qquad (\mathcal{EC})$$

   Utiliza el Método de separación de variables para determinar la expresión de $u(t,x)$ a partir de la distribución inicial de temperatura

$$u(0,x) = u_0(x) = \begin{cases} 0, & |x - 1/2| \ge 1/4 \\ \operatorname{sen}(4\pi x), & |x-1/2| < 1/4 \end{cases}$$

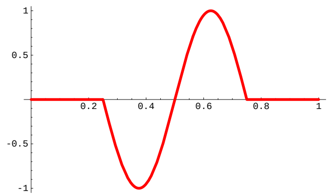

Figura 4: Distribución inicial de temperatura

Ayuda: Se verifican las fórmulas trigonométricas:

✓ $\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) = \dfrac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta)\right)$

✓ $\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) = \dfrac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$

✓ $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \dfrac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right)$

Grado en Ingeniería Mecánica
"Matemáticas II"
Curso 2013/14
Convocatoria de Febrero (10/02/14)

Indicaciones

- Los alumnos deberán responder a las cuestiones teóricas y a **tres** de los cuatro problemas propuestos.
- En la primera hoja se indicará el nombre completo.
- El examen aportará un **70%** de la nota final de la asignatura. El resto se obtendrá a partir de la prueba de valoración de las prácticas de ordenador (20%) y de la participación en las clases de problemas (10%).
- La duración del examen es de **3.5** horas.

Cuestiones teóricas

1. Dado el campo vectorial expresado en coordenadas cilíndricas

$$\mathbf{F}(r,\theta,z) = \left(r^2\operatorname{sen}(\theta)\cos^2(\theta) + z^2\operatorname{sen}(\theta)\right)\vec{\boldsymbol{e}}_r - \left(r^2\operatorname{sen}^2(\theta)\cos(\theta) - z^2\cos(\theta)\right)\vec{\boldsymbol{e}}_\theta + r\cos(z)\vec{\boldsymbol{k}}$$

donde $\{\vec{\boldsymbol{e}}_r, \vec{\boldsymbol{e}}_\theta, \vec{\boldsymbol{k}}\}$ es la base de vectores móviles de $\mathbb{R}^3$ asociada a dichas coordenadas:

   (a) **(0.5 Ptos.)** Escribe la expresión del campo $\mathbf{F}$ en cartesianas.

   (b) **(0.5 Ptos.)** Escribe el campo rotacional $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ en coordenadas cilíndricas.

2. Sea la función $f(x) = \operatorname{sen}(1+x^2)$ y sean a_n, $n = 0,1,2,\ldots$ sus coeficientes de Fourier. Responde de forma justificada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

   (a) **(0.5 Ptos.)** $\dfrac{a_0^2}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \pi$

   (b) **(0.5 Ptos.)** $\dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \operatorname{sen}(1)$

3. **(0.5 Ptos.)** Sean la curva de ecuación $\gamma(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(2t))$, $0 \le t \le 2\pi$, (denominada *lemniscata de Bernoulli*, Figura 1) y el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y) = (-y, x)$.

   (a) Calcula la integral de $\mathbf{F}$ a lo largo de γ.

   (b) Teniendo en cuenta que el resultado del apartado anterior y sabiendo que el área de la región limitada por γ es igual a $8/3$, ¿se verifica en este caso el teorema de Green? ¿Por qué?

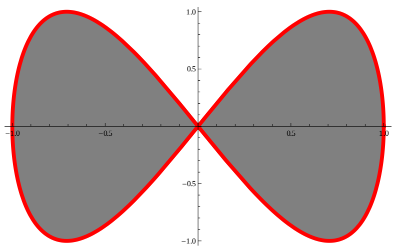

Figura 1: Lemniscata γ

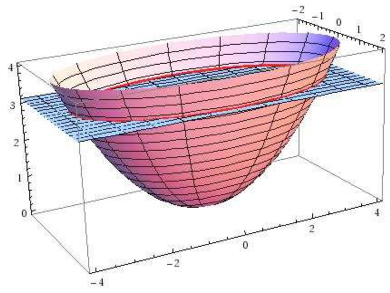

Figura 2: Intersección de $\mathcal{P}$ con $z = \pi$

Problemas

1. **(2.5 Ptos.)** Calcula la integral del campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(y^2 + \operatorname{sen}^2\left(\pi x^2 + 1\right)\right)\vec{\imath} + \left(z + \cos\left(y^2\right)\right)\vec{\jmath} + \left(y + \log\left(1+x^2\right)\right)\vec{\boldsymbol{k}}$$

a lo largo de la curva obtenida al intersectar el paraboloide de sección elíptica

$$\mathcal{P} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + \frac{y^2}{4} - z = 0\right\}$$

con el plano $z = \pi$ (Figura 2). Justifica al procedimiento que uses.

Sigue detrás ⇒

2. **(2.5 Ptos.)** Dada la superficie

$$\mathcal{A} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - \operatorname{sen}(y))^2 + (z - \cos(y))^2 = 1,\ 0 < y < 5\right\}$$

y el campo de temperaturas $T(x, y, z) = (x-1)^2 y + xz^2$, calcula el flujo de calor a través de $\mathcal{A}$, suponiendo por simplicidad que la conductividad térmica es constante e igual a uno, es decir, calcula la integral de superficie

$$\int_{\mathcal{A}} \nabla T \cdot dS$$

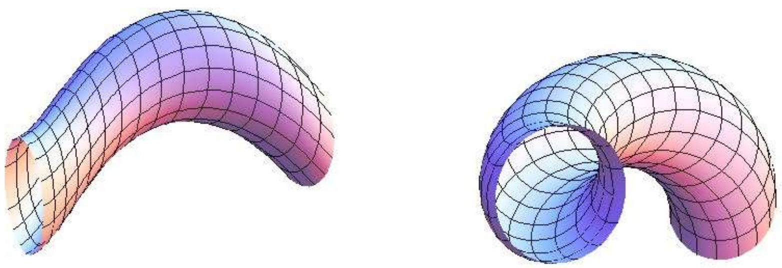

Figura 3: Dos vistas de la superficie $\mathcal{A}$

Ayuda: Para describir una región cilíndrica de la forma

$$Q = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - p(y))^2 + (z - q(y))^2 < 1,\ a < y < b\right\}$$

donde $a < b$ son constantes y $p, q : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones, funcionan bien las coordenadas cilíndricas (r, θ, y), que se relacionan con las cartesianas mediante las igualdades

$$x = p(y) + r\cos(\theta), \quad y = y, \quad z = q(y) + r\operatorname{sen}(\theta)$$

Su rango es $0 < r < 1$, $0 < \theta < 2\pi$, $a < y < b$ y el determinante jacobiano asociado $J = r$.

---

3. **(2.5 Ptos.)** Calcula la integral del campo vectorial

$$\mathbf{G}(x, y) = \left((1 + x)y^2,\ \pi x - \log(1 + y^2)\cos(y^4 + 3y)\right)$$

a lo largo de la frontera del conjunto (Figura 4)

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + (y-1)^2 < 4,\ y + x > 0\right\}$$

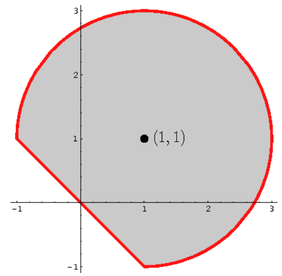

Figura 4: Conjunto D

orientada positivamente. Justifica el procedimiento que uses.

Ayuda: Para describir de forma sencilla regiones circulares no centradas en el origen se usan las coordenadas polares desplazadas que se relacionan con las cartesianas mediante las ecuaciones

$$x = x_0 + r\cos(\theta), \quad y = y_0 + r\operatorname{sen}(\theta)$$

donde (x_0, y_0) es el centro de la región, $r > 0$ la distancia de cada punto al centro y $0 < \theta < 2\pi$ el ángulo de giro. El determinante jacobiano del cambio de variable asociado es igual a r (al igual que en las coordenadas polares habituales).

---

4. Dada la función $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida mediante la expresión

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x \le -1/2 \\ \operatorname{sen}(\pi x), & -1/2 < x < 1/2 \\ 1/2, & 1/2 \le x \le 1 \end{cases}$$

(a) **(1 Pto.)** Calcula su serie de Fourier.

(b) **(1 Pto.)** Estudia la convergencia puntual en el intervalo $[-1, 1]$ de la sucesión de las sumas parciales de la serie de Fourier de f. Dibuja las gráficas de f y de la función límite puntual.

(c) **(0.5 Ptos.)** Utiliza la convergencia puntual de la serie de Fourier en $x = 1$ para comprobar que se verifica la igualdad

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

Ayuda: Se verifican las fórmulas trigonométricas:

✓ $\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) = \dfrac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta)\right)$

✓ $\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) = \dfrac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$

✓ $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \dfrac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right)$

Grado en Ingeniería Mecánica
"Matemáticas II"
Curso 2014/15 **(Grupos 1-2)**
Convocatoria de Febrero (09/02/15)

INDICACIONES

- Deberán responderse las cuestiones teóricas y **tres** problemas libremente elegidos de entre los cinco propuestos.
- En la primera hoja se indicará el nombre completo y el grupo.
- El examen aportará un **70%** de la nota final de la asignatura. El resto se obtendrá a partir de la prueba de valoración de las prácticas de ordenador (20%) y de la participación en las clases de problemas entregables (10%).
- La duración del examen es de **3.5** horas.

CUESTIONES TEÓRICAS

1. Dado el campo vectorial expresado en coordenadas cartesianas

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x + y\,\mathrm{sen}(x))\,\vec{\mathbf{\imath}} + \mathrm{sen}\left(1+y^2\right)\vec{\mathbf{\jmath}} + (x - 2yz)\,\vec{\boldsymbol{k}}$$

   (a) **(0.5 Ptos.)** Escribe la expresión del campo rotacional $\mathrm{rot}\,\mathbf{F}$ en cilíndricas.

   (b) **(0.5 Ptos.)** Calcula el valor de la divergencia de $\mathbf{F}$ en el punto cuyas coordenadas esféricas son $(\sqrt{2}, \pi/2, \pi/4)$.

   (c) **(0.5 Ptos.)** Calcula la integral del campo $\mathrm{rot}\,\mathbf{F}$ sobre la superficie (Figura 1):

$$\mathcal{S} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + \frac{z^2}{(1+x)^2} = \mathrm{sen}(x),\ 0 < x < \pi/2\right\}$$

2. Sea la función $\phi(x) = x\cos(\pi + x^2)$ definida en el intervalo $[-1, 1]$. Responde de forma justificada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

   (a) **(0.5 Ptos.)** Para cada $n \geq 1$ se verifica la igualdad:

$$\int_{-1}^{1} \phi(y)\cos(n\pi y)\,dy = (-1)^n$$

   (b) **(0.5 Ptos.)** $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \phi(y)\cos(n\pi y + \pi/2)\,dy = 0$

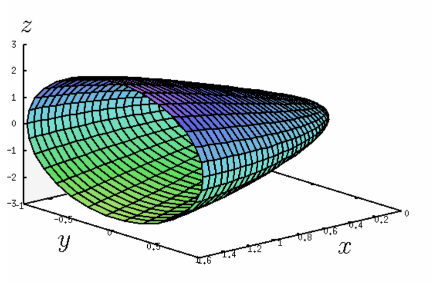

Figura 1: Superficie $\mathcal{S}$

PROBLEMAS

1. Resuelve los siguientes apartados, justificando los resultados que uses:

   (a) **(1.25 Ptos.)** Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ el conjunto limitado por la espiral $\gamma(\theta) = (\theta\cos(\theta),\ \theta\,\mathrm{sen}(\theta))$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, y la recta $y = x$. Determina el valor de la integral

$$\int_{\partial D^+} \mathbf{F} \cdot ds$$

   donde $\mathbf{F}(x,y) = \left(-y^2 + \log(1+x^2),\ \pi x + \mathrm{sen}(1 + e^{y^2})\right)$.

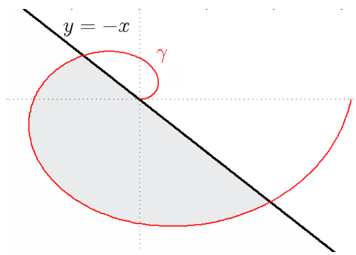

Figura 2: Conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$

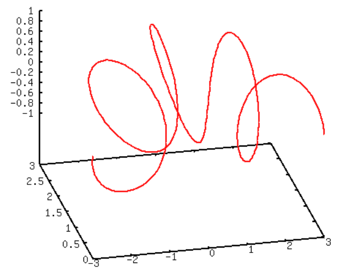

Figura 3: Curva β

   (b) **(1.25 Ptos.)** Calcula la integral del campo vectorial

$$\mathbf{P}(x,y,z) = x^2 y\,\vec{\mathbf{\imath}} + \left(\frac{x^3}{3} + z\right)\vec{\mathbf{\jmath}} + y\,\vec{\boldsymbol{k}}$$

   a lo largo de la curva

$$\beta(t) = \left((2 + \cos(8t))\cos(t),\ (2 + \cos(8t))\,\mathrm{sen}(t),\ \mathrm{sen}(8t)\right), \quad t \in [0, \pi]$$

Sigue detrás ⇒

2. Sea el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = x\log\left(1+y^2\right)\vec{\imath} + (x+2y\cos(z))\vec{\jmath} + \left(x^2+\cos(y^2-3z)\right)\vec{k}$$

(a) **(1.25 Ptos.)** Calcula la circulación de $\mathbf{F}$ alrededor del borde de la superficie $\mathcal{M}$ (en rojo en la Figura 4), donde

$$\mathcal{M} = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x-\cos(2z))^2+(y-\operatorname{sen}(2z))^2 = \operatorname{sen}(z),\ 0<z<\pi/2\right\}$$

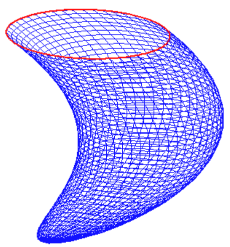

Figura 4: Borde de $\mathcal{M}$

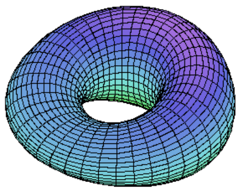

Figura 5: Superficie $\mathcal{A}$

(b) **(1.25 Ptos.)** Sea $\mathcal{A}\subset\mathbb{R}^3$ la superficie descrita mediante la parametrización

$$\psi(\theta,\varphi) = ((2+\cos(\varphi))\cos(\theta),\ (2+\cos(\varphi))\operatorname{sen}(\theta),\ (2+\cos(\theta))\operatorname{sen}(\varphi))$$

con $0<\theta<2\pi$, $0<\varphi<2\pi$ (Figura 4). Calcula la integral

$$\int_{\mathcal{A}} (\nabla f + \operatorname{rot}\mathbf{G})\cdot dS$$

donde $f(x,y,z) = 1+z^2$.

Ayuda: Si g es una función 2π-periódica ($g(x) = g(x+2\pi)$) e impar ($g(-x) = -g(x)$), entonces

$$\int_0^{2\pi} g(y)\,dy = 0$$

3. Sea $T(x,y,z) = x^2+y^2+z$ un campo de densidad de temperatura definido sobre un dominio $\Omega\subset\mathbb{R}^3$.

(a) **(1.25 Ptos.)** Calcula la temperatura global de la región

$$D = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x-\cos(2z))^2+(y-\operatorname{sen}(2z))^2 < \operatorname{sen}(z),\ 0<z<\pi/2\right\}\subset\Omega$$

mediante la integral

$$\int_D T(x,y,z)\,dxdydz$$

(b) **(1.25 Ptos.)** Determina el flujo de calor a través de la frontera lateral de D, que coincide con la superficie $\mathcal{M}$ del problema anterior, calculando la integral

$$\int_{\mathcal{M}} \nabla T\cdot dS$$

Ayuda: La función $z\sqrt{\operatorname{sen}(z)}$ es continua, luego integrable, en $[0,\pi/2]$, con

$$\int_0^{\pi/2} z\sqrt{\operatorname{sen}(z)}\,dz \approx 1.09742585$$

4. Sea $\mathcal{H}\subset\mathbb{R}^3$ el helicoide parametrizado por el abierto $V =]0,1[\times]0,2\pi[\subset\mathbb{R}^2$ y la aplicación

$$\Phi(r,\theta) = (r\cos(\theta),\ r\operatorname{sen}(\theta),\ h(\theta)),\quad (r,\theta)\in V$$

con $h:[0,2\pi]\longrightarrow\mathbb{R}$ una función derivable. Si $\rho(x,y,z) = \sqrt{1+x^2+y^2}$ indica la densidad en cada punto de $\mathcal{H}$:

(a) **(1.25 Ptos.)** Determina la expresión de la masa del helicoide

$$\texttt{masa}(\mathcal{H}) = \int_{\mathcal{H}} \rho\,dS$$

y calcula su valor en el caso particular en que $h(\theta) = \theta$.

(b) **(1.25 Ptos.)** Dado el campo vectorial $\mathbf{G}(x,y,z) = y\,\vec{\imath} - x\,\vec{\jmath} + \vec{k}$, calcula la integral

$$\int_{\mathcal{H}} \mathbf{G}\cdot dS$$

en el caso general y para $h(\theta) = 1+\theta^2$.

5. Dada la función $f:[-1,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ definida mediante la expresión

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1\le x<0 \\ \sin(\pi x+\pi/2), & 0\le x<1 \end{cases}$$

(a) **(1 Pto.)** Calcula su serie de Fourier.

(b) **(1 Pto.)** Estudia la convergencia puntual en el intervalo $[-1,1]$ de la sucesión de las sumas parciales de la serie de Fourier de f.

(c) **(0.5 Ptos.)** Dibuja las gráficas de la función f y de la función límite puntual de la serie de Fourier.

Ayuda: Se verifican las fórmulas trigonométricas:

- ✓ $\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta))$
- ✓ $\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$
- ✓ $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$

Universidad Politécnica de Cartagena

Grado en Ingeniería Mecánica
“Matemáticas II”
Curso 2012/13
Convocatoria de Junio (12/06/13)

Indicaciones

- Los alumnos deberán responder a las cuestiones teóricas y a los **cuatro** problemas propuestos.
- En la primera hoja se indicará el nombre completo y el grupo.
- El examen aportará un **80%** de la nota final de la asignatura. El **20%** restante se obtendrá a partir de la valoración de las prácticas, de la realización de problemas y de la participación en clase.
- La duración del examen es de **3.5** horas.

Cuestiones teóricas

1. Dado el campo vectorial expresado en coordenadas cilíndricas

$$\mathbf{F}(r,\theta,z) = r^2\cos^2(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)\vec{e}_r - r^2\cos(\theta)\,\mathrm{sen}^2(\theta)\vec{e}_\theta + \left(r\,\mathrm{sen}(\theta)+\cos(z^2)\right)\vec{k}$$

donde $\{\vec{e}_r,\, \vec{e}_\theta, \vec{k}\}$ es la base de vectores móviles de $\mathbb{R}^3$ asociada a dichas coordenadas:

(a) **(0.5 Ptos.)** Escribe la expresión del campo escalar $\operatorname{div}\mathbf{F}$ en coordenadas cartesianas.

(b) **(0.5 Ptos.)** Determina el valor de la integral del campo vectorial $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ a lo largo del borde de la superficie (Figura 1)

$$\mathcal{S} = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+\frac{y^2}{3} = z,\ 0<z<3\right\}.$$

2. **(1 Pto.)** La ecuación de Laplace-Poisson

$$\left.\begin{array}{ll} -\Delta u(x,y) = y\,\mathrm{sen}(\pi x), & 0<x<1,\ y>0 \\ u(0,y)=u(1,y)=0, & y>0 \\ u(x,0)=0, & 0<x<1 \end{array}\right\} \qquad (\mathcal{LP})$$

describe el desplazamiento vertical de una lámina plana sometida a la acción de una fuerza transversal. Comprueba que la función

$$u(x,y) = \mathrm{sen}(\pi x)\left(\mathrm{senh}(\pi y) + \frac{y}{\pi^2}\right)$$

es solución de $(\mathcal{LP})$.

Ayuda: La expresión senh denota el seno hiperbólico, definido por la relación

$$\mathrm{senh}(\omega) = \frac{e^{\omega}-e^{-\omega}}{2}$$

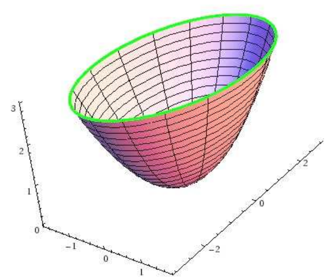

Figura 1: Superficie $\mathcal{S}$ con borde $\partial\mathcal{S}$

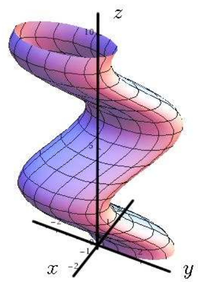

Figura 2: Superficie $\mathcal{A}$

Problemas

1. **(2 Ptos.)** Dada la superficie cilíndrica (Figura 2)

$$\mathcal{A} = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \frac{(x-\cos(z))^2}{4} + (y-\cos(z))^2 = 1,\ 0<z<10\right\}$$

calcula el flujo de calor a través de la misma que genera el campo de temperaturas $T(x,y,z) = z(x^2+(y-1)^2)$, suponiendo por simplicidad que la conductividad térmica es constante e igual a uno, es decir, calcula la integral de superficie

$$\int_{\mathcal{A}} \nabla T\cdot dS$$

Justifica el procedimiento utilizado.

Ayuda: Para describir una región cuya geometría se asemeja a un cilindro de sección elíptica con centro y semiejes variables con la altura pueden usarse coordenadas cilíndricas de la forma $(r,\,\theta,\,z)$, que se relacionan con las cartesianas mediante las igualdades

$$x = p(z)+a(z)r\cos(\theta),\quad y = q(z)+b(z)r\,\mathrm{sen}(\theta),\quad z=z$$

siendo $a(z)$, $b(z)$ los semiejes de las secciones elípticas y $(p(z),q(z))$ las coordenadas del centro. El rango máximo de los valores que pueden tomar estas coordenadas es $0<r<1$, $0<\theta<2\pi$, $z\in\mathbb{R}$. El determinante jacobiano es en este caso de la forma $J = a(z)b(z)r$.

Sigue detrás ⇒

2. **(2 Ptos.)** Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ el recinto limitado por la circunferencia unidad y la parábola $y = x^2/2$ (Figura 3). Calcula la integral

$$\int_{\partial D^+} \mathbf{F} \cdot ds$$

donde $\mathbf{F}(x,y) = \big(-(x-\pi)y^2 + \cos(x^2),\, \log(1+y^2)\big)$ y ∂D^+ es la frontera del recinto D orientada positivamente.

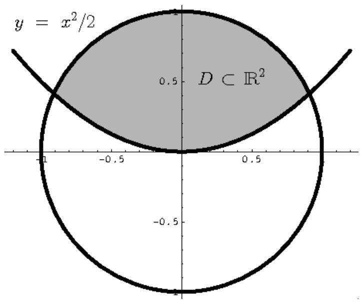

Figura 3: Conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$

3. Dada la función $f : [-2,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida mediante la expresión

$$f(x) = \begin{cases} -1/2, & -2 \leq x \leq -1 \\ \operatorname{sen}(\pi x), & -1 < x < 1 \\ 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

   (a) **(1 Pto.)** Calcula su serie de Fourier.

   (b) **(1 Pto.)** Estudia la convergencia puntual en el intervalo $[-2,2]$ de la sucesión de las sumas parciales de la serie de Fourier de f. Dibuja las gráficas de f y de la función límite puntual.

4. **(2 Ptos.)** La función $u(t,x)$ que porporciona la temperatura en el instante $t > 0$ en cada punto $x \in [0,1]$ de una barra unidimensional de longitud unidad aislada en los extremos y de forma que el calor se transmite únicamente por conducción, es solución del problema

$$\left.\begin{array}{ll} u_t(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x), & t > 0,\ 0 < x < 1 \\ u_x(t,0) = u_x(t,1) = 0, & t > 0 \end{array}\right\} \qquad (\mathcal{EC})$$

Utiliza el Método de separación de variables para determinar la expresión de $u(t,x)$ a partir de la distribución inicial de temperatura

$$u(0,x) = u_0(x) = \begin{cases} 0, & |x - 1/2| \geq 1/4 \\ \operatorname{sen}(4\pi x), & |x - 1/2| < 1/4 \end{cases}$$

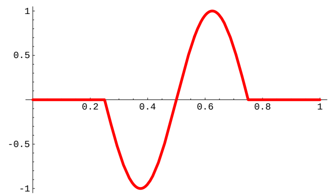

Figura 4: Distribución inicial de temperatura

Ayuda: Se verifican las fórmulas trigonométricas:

✓ $\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta)\right)$

✓ $\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$

✓ $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right)$

Universidad Politécnica de Cartagena

Grado en Ingeniería Mecánica
“Matemáticas II”
Curso 2013/14
Convocatoria de Junio (28/06/14)

Indicaciones

- Los alumnos deberán responder a las cuestiones teóricas y a **tres** de los cuatro problemas propuestos.
- En la primera hoja se indicará el nombre completo.
- El examen aportará un **70%** de la nota final de la asignatura. El resto se obtendrá a partir de la prueba de valoración de las prácticas de ordenador (20%) y de la participación en las clases de problemas (10%).
- La duración del examen es de **3.5** horas.

Cuestiones teóricas

1. Dado el campo vectorial expresado en coordenadas cartesianas

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x + y\,\mathrm{sen}(x))\,\vec{\imath} + \left(y^2+z\right)\vec{\jmath} + (x-2yz)\,\vec{k}$$

   (a) **(0.5 Ptos.)** Escribe la expresión del campo rotacional $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ en esféricas.

   (b) **(0.5 Ptos.)** Calcula el gradiente de la divergencia del campo $\mathbf{F}$, es decir, $\nabla(\operatorname{div}\mathbf{F})$.

   (c) **(0.5 Ptos.)** Calcula la integral del campo $\nabla(\operatorname{div}\mathbf{F})$ sobre la superficie (Figura 1):

$$\mathcal{H} = \left\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 : (x-\cos(y))^2 + (z-\mathrm{sen}(y))^2 = y,\ 0<y<5\right\}$$

Ayuda:

$$\int_0^1\int_0^{2\pi} r\cos\left(\cos(5)+r\cos(\theta)\right)d\theta dr \approx 2.65442$$

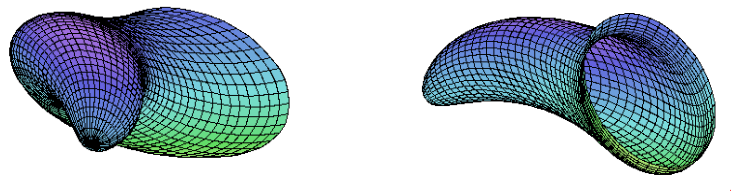

Figura 1: Dos vistas de la superficie $\mathcal{H}$

2. Sea la función $\phi(x) = \mathrm{sen}(1+x^2)$ definida en el intervalo $[-1,1]$ y sean a_n, $n=0,1,2,\ldots$ sus coeficientes de Fourier. Responde de forma justificada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

   (a) **(0.5 Ptos.)** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \mathrm{sen}(1+x^2)\cos(n\pi x)\,dx = \pi$

   (b) **(0.5 Ptos.)** $\displaystyle\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n = \mathrm{sen}(2)$

Problemas

1. Resuelve los siguientes apartados:

   (a) **(1.25 Ptos.)** Dada la curva espiral $\gamma(\theta) = (\theta\cos(\theta),\, \theta\,\mathrm{sen}(\theta))$, $0\le\theta\le 2\pi$, determina el valor de la integral

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot ds$$

   donde $\mathbf{F}(x,y) = (-y,x)$.

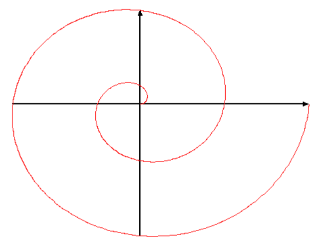

Figura 2: Espiral γ

Sigue detrás ⇒

(b) **(1.25 Ptos.)** Usa el teorema de cambio de variable para calcular la integral iterada

$$\int_0^{1/2}\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x\sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx$$

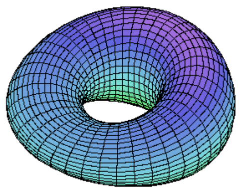

Figura 3: Superficie $\mathcal{A}$

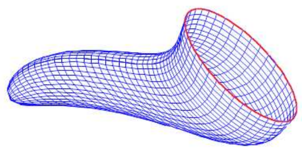

Figura 4: Borde de $\mathcal{H}$

2. Resuelve, justificando los resultados que uses, los apartados:

(a) **(1.25 Ptos)** Sea $\mathcal{A}\subset \mathbb{R}^3$ una superficie toroidal descrita mediante la parametrización

$$\psi(\theta,\varphi) = ((2+\cos(\varphi))\cos(\theta),\,(2+\cos(\varphi))\,\mathrm{sen}(\theta),\,(2+\cos(\theta))\,\mathrm{sen}(\varphi))$$

con $0<\theta<2\pi$, $0<\varphi<2\pi$ (Figura 3). Comprueba que se verifica la identidad

$$\mathrm{Volumen}(\Omega) = \int_{\mathcal{A}} z\vec{\boldsymbol{k}}\cdot dS \qquad (\clubsuit)$$

donde $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ es la región del espacio limitada por $\mathcal{A}$. Utiliza la expresión anterior para calcular el volumen de Ω.

(b) **(1.25 Ptos.)** Sean el campo vectorial

$$\mathbf{G}(x,y,z) = x\log\left(1+y^2\right)\vec{\mathbf{\imath}} + (x+2y\cos(z))\,\vec{\mathbf{\jmath}} + \left(x^2+\cos(y^2-3z)\right)\vec{\boldsymbol{k}}$$

y la superficie $\mathcal{H}$ del apartado (c) de la primera cuestión. Calcula la circulación del campo $\mathbf{G}$ alrededor del borde de $\mathcal{H}$ (en rojo en la Figura 4), es decir,

$$\int_{\partial\mathcal{H}} \mathbf{G}\cdot ds$$

3. **(2.5 Ptos.)** Calcula la integral del campo vectorial

$$\mathbf{P}(x,y,z) = \left(1+2xy\cos\left(1+x^2\right)\right)\vec{\mathbf{\imath}} + \left(\mathrm{sen}\left(1+x^2\right)-2\pi y\right)\vec{\mathbf{\jmath}} + \cos(z)\vec{\boldsymbol{k}}$$

a lo largo de la espiral β de ecuación

$$\beta(t) = (\delta(t)\cos(t),\,\delta(t)\,\mathrm{sen}(t),\,t/2)\,,\quad 0\le t\le 6\pi$$

con $\delta(t) = 1+\frac{t}{2\pi}$.

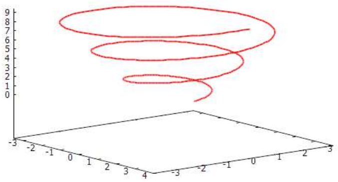

Figura 5: Espiral β

4. Dada la función $f:[-1,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ definida mediante la expresión

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1\le x\le -1/2 \\ x\cos(\pi x), & -1/2<x<1/2 \\ 1/2, & 1/2\le x\le 1\end{cases}$$

(a) **(1 Pto.)** Calcula su serie de Fourier.

(b) **(1 Pto.)** Estudia la convergencia puntual en el intervalo $[-1,1]$ de la sucesión de las sumas parciales de la serie de Fourier de f.

(c) **(0.5 Ptos.)** Utiliza la convergencia puntual de la serie de Fourier en $x=0$ para comprobar que se verifica la igualdad

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

Ayuda: Se verifican las fórmulas trigonométricas:

✓ $\mathrm{sen}(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{sen}(\alpha+\beta)+\mathrm{sen}(\alpha-\beta)\right)$

✓ $\mathrm{sen}(\alpha)\,\mathrm{sen}(\beta) = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$

✓ $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right)$

Grado en Ingeniería Mecánica
"Matemáticas II"
Curso 2014/15 (Grupos 1-2-3)
Convocatoria de Junio (10/07/15)

Indicaciones

- Deberán responderse las cuestiones teóricas y **tres** problemas libremente elegidos de entre los cinco propuestos.
- En la primera hoja se indicará el nombre completo y el grupo.
- El examen aportará un **70%** de la nota final de la asignatura.
- La duración del examen es de **3.5** horas.

Cuestiones teóricas

1. Dado el campo vectorial expresado en coordenadas cartesianas

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x + y\,\mathrm{sen}(x))\,\vec{\mathbf{i}} + \mathrm{sen}\left(1+y^2\right)\vec{\mathbf{j}} + (x-2yz)\,\vec{\boldsymbol{k}}$$

   (a) **(0.5 Ptos.)** Escribe la expresión del campo rotacional $\mathrm{rot}\,\mathbf{F}$ en cilíndricas.

   (b) **(0.5 Ptos.)** Calcula el valor de la divergencia de $\mathbf{F}$ en el punto cuyas coordenadas esféricas son $(\sqrt{2}, \pi/2, \pi/4)$.

   (c) **(0.5 Ptos.)** Calcula la integral del campo $\mathrm{rot}\,\mathbf{F}$ sobre la superficie $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^3$ descrita por la parametrización

$$\psi(\theta,\varphi) = ((2+\cos(\varphi))\cos(\theta),\ (2+\cos(\varphi))\,\mathrm{sen}(\theta),\ (2+\cos(\theta))\,\mathrm{sen}(\varphi))$$

   con $0 < \theta < 2\pi$, $0 < \varphi < 2\pi$ (Figura 1).

2. Sea $\mathbf{G} = (G_1, G_2)$ un campo vectorial bidimensional de forma que $\mathbf{G}(0,0) = (1,1)$ y $G_1(x,y) = y\,\mathrm{sen}(x-1) + \cos(x)$.

   (a) **(0.5 Ptos.)** Determina el valor de G_2 para que el campo sea incompresible.

   (b) **(0.5 Ptos.)** ¿Qué debe valer G_2 para que el campo sea conservativo?

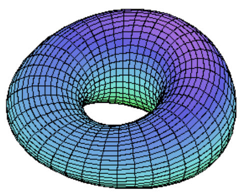

Figura 1: Superficie $\mathcal{A}$

Problemas

1. Resuelve los siguientes apartados, justificando los resultados que uses:

   (a) **(1.25 Ptos.)** Sea γ la curva poligonal obtenida al unir los segmentos rectilíneos entre los puntos $(1,0) \to (0,1) \to (-1,0) \to (0,-1) \to (1,0)$. Determina el valor de la integral

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot ds$$

   donde $\mathbf{F}(x,y) = \left(-y^2 + \log(1+x^2),\ \pi x + \mathrm{sen}(1+e^{y^2})\right)$.

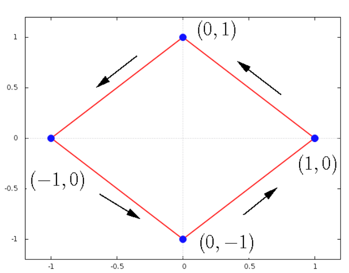

Figura 2: Curva poligonal γ

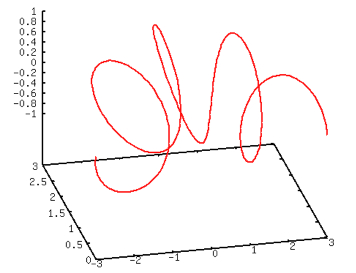

Figura 3: Curva β

   (b) **(1.25 Ptos.)** Calcula la integral del campo vectorial

$$\mathbf{J}(x,y,z) = x^2 y\,\vec{\mathbf{i}} + \left(\frac{x^3}{3} + z\right)\vec{\mathbf{j}} + y\,\vec{\boldsymbol{k}}$$

   a lo largo de la curva

$$\beta(t) = ((2+\cos(8t))\cos(t),\ (2+\cos(8t))\,\mathrm{sen}(t),\ \mathrm{sen}(8t))\,, \quad t\in[0,\pi]$$

Sigue detrás ⇒

2. Sea el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = x\log\left(1+y^2\right)\vec{\mathbf{\imath}} + (x+2y\cos(z))\,\vec{\mathbf{\jmath}} + \left(x^2+\cos(y^2-3z)\right)\vec{\boldsymbol{k}}$$

(a) **(1.25 Ptos.)** Calcula la circulación de $\mathbf{F}$ alrededor del borde de la superficie $\mathcal{M}$ (en rojo en la Figura 4), donde

$$\mathcal{M} = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x-\cos(2z))^2 + (y-\operatorname{sen}(2z))^2 = \operatorname{sen}(z),\ 0<z<\pi/2\right\}$$

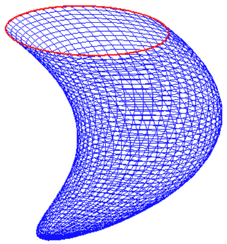

Figura 4: Borde de $\mathcal{M}$

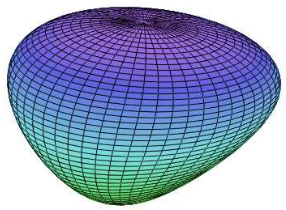

Figura 5: Región D

(b) **(1.25 Ptos.)** Calcula el flujo a través de $\mathcal{M}$,

$$\int_{\mathcal{M}} \mathbf{W}\cdot dS$$

del campo vectorial $\mathbf{W}(x,y,z) = x\,\vec{\mathbf{\imath}} + y\operatorname{sen}(z)\,\vec{\mathbf{\jmath}} + \operatorname{rot}\mathbf{F}(x,y,z)$.

Ayuda: Si g es una función 2π-periódica ($g(\theta) = g(\theta+2\pi)$) e impar ($g(-\theta) = -g(\theta)$), entonces

$$\int_0^{2\pi} g(\theta)\,d\theta = 0$$

---

3. Sea $T(x,y,z) = x^2+y^2+z$ un campo escalar describiendo la densidad de temperatura sobre un dominio de $\mathbb{R}^3$.

(a) **(1.25 Ptos.)** Calcula la temperatura global de la región (Figura 5):

$$D = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{(2+z)^2} + y^2 + z^2 < 1\right\}$$

mediante la integral

$$\int_D T(x,y,z)\,dxdydz$$

(b) **(1.25 Ptos.)** Determina el flujo de calor a través de la frontera de D, calculando la integral de superficie

$$\int_{\partial D} \nabla T\cdot dS$$

Ayuda: Los conjuntos de la forma

$$E = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a(z)^2} + \frac{y^2}{b(z)^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1\right\}$$

donde $a,b:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ son funciones y $c>0$ es una constante se describen de forma sencilla tomando las coordenadas (r,θ,φ) que verifican las relaciones

$$x = a(cr\cos(\varphi))r\cos(\theta)\operatorname{sen}(\varphi),\quad y = b(cr\cos(\varphi))r\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\varphi),\quad z = cr\cos(\varphi)$$

Los dominios de las variables son $0<r<1$, $0<\theta<2\pi$, $0<\varphi<\pi$, y el determinante de la matriz jacobiana $J = a(cr\cos(\varphi))b(cr\cos(\varphi))cr^2\operatorname{sen}(\varphi)$. La frontera de E es una superficie que se parametriza de forma sencilla tomando $r=1$ en las ecuaciones anteriores.

---

4. Sea $\mathcal{H}\subset\mathbb{R}^3$ la superficie parametrizada por el abierto $V =]0,1[\times]0,2\pi[\subset\mathbb{R}^2$ y la aplicación

$$\Phi(r,\theta) = (r\cos(\theta),\ r\operatorname{sen}(\theta),\ 2\theta),\quad (r,\theta)\in V$$

(a) **(1 Ptos.)** Si $\rho(x,y,z) = z\sqrt{x^2+y^2}$ proporciona la densidad en cada punto de $\mathcal{H}$, determina su masa,

$$\texttt{masa}(\mathcal{H}) = \int_{\mathcal{H}} \rho\,dS$$

(b) **(0.5 Ptos.)** Teniendo en cuenta que el área de $\mathcal{H}$ viene dada por la integral

$$\texttt{area}(\mathcal{H}) = \int_{\mathcal{H}} dS$$

justifica si la desigualdad $\texttt{area}(\mathcal{H})\leq 4$ es verdadera o falsa.

(c) **(1 Ptos.)** Dado el campo vectorial $\mathbf{P}(x,y,z) = y\,\vec{\mathbf{\imath}} - x\,\vec{\mathbf{\jmath}} + \vec{\boldsymbol{k}}$, calcula la integral

$$\int_{\mathcal{H}} \mathbf{P}\cdot dS$$

5. Dada la función $f:[-1,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ definida mediante la expresión

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1\leq x<-1/2 \\ \operatorname{sen}(\pi x+\pi/2), & -1/2\leq x\leq 1/2 \\ 1, & 1/2<x\leq 1 \end{cases}$$

(a) **(1 Pto.)** Calcula su serie de Fourier.

(b) **(1 Pto.)** Estudia la convergencia puntual en el intervalo $[-1,1]$ de la sucesión de las sumas parciales de la serie de Fourier de f.

(c) **(0.5 Ptos.)** Dibuja las gráficas de la función f y de la función límite puntual de su serie de Fourier.

Ayuda: Se verifican las fórmulas trigonométricas:

✓ $\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta))$

✓ $\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$

✓ $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$

Universidad Politécnica de Cartagena

Grado en Ingeniería Mecánica
"Matemáticas II"
Curso 2012/13
Convocatoria de Septiembre (03/09/13)

INDICACIONES

- Los alumnos deberán responder a las cuestiones teóricas y a los **cuatro** problemas propuestos.
- En la primera hoja se indicará el nombre completo y el grupo.
- El examen aportará un **80%** de la nota final de la asignatura. El **20%** restante se obtendrá a partir de la valoración de las prácticas, de la realización de problemas y de la participación en clase.
- La duración del examen es de **3.5** horas.

CUESTIONES TEÓRICAS

1. Dado el campo vectorial expresado en coordenadas cilíndricas

$$\mathbf{F}(r,\theta,z) = \left(r^2\operatorname{sen}(\theta)\cos^2(\theta) + z^2\operatorname{sen}(\theta)\right)\vec{\boldsymbol{e}}_r - \left(r^2\operatorname{sen}^2(\theta)\cos(\theta) - z^2\cos(\theta)\right)\vec{\boldsymbol{e}}_\theta + r\cos(z)\vec{\boldsymbol{k}}$$

donde $\{\vec{\boldsymbol{e}}_r, \vec{\boldsymbol{e}}_\theta, \vec{\boldsymbol{k}}\}$ es la base de vectores móviles de $\mathbb{R}^3$ asociada a dichas coordenadas:

   (a) **(0.5 Ptos.)** Escribe la expresión del campo rotacional $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ en cartesianas.

   (b) **(0.5 Ptos.)** Determina el valor de la integral de $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ sobre la superficie (Figura 1)

$$\mathcal{S} = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2 + \frac{y^2}{2+\cos(\pi z)} = z,\ 0<z<4\right\}.$$

2. La ecuación del telégrafo

$$\left.\begin{array}{ll} y_{tt}(t,x) = y_{xx}(t,x) - \beta y_t(t,x), & 0<x<1,\ t>0 \\ y(t,0) = y(t,1) = 0, & t>0 \end{array}\right\} \qquad (\mathcal{T})$$

permite describir las oscilaciones transversales de una cuerda fija en los extremos en presencia de rozamiento. La energía asociada a una solución es de la forma

$$\mathcal{E}(t) = \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^1 y_t^2(t,x)\,dx}_{\text{Energía cinética}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^1 y_x^2(t,x)\,dx}_{\text{Energía potencial elástica}}$$

   (a) **(0.5 Ptos.)** Comprueba que la energía $\mathcal{E}(t)$ decrece a lo largo del tiempo.

   (b) **(0.5 Ptos.)** Si añadimos las condiciones iniciales $y(0,x) = \operatorname{sen}(\pi x)$, $y_t(0,x) = 0$, $0<x<1$, ¿existirá algún $t^*>0$ de forma que $\mathcal{E}(t^*)\geq 5$? ¿por qué?

Ayuda: Para ver que la energía $\mathcal{E}(t)$ es suficiente comprobar que su derivada es negativa. Por otra parte, si se tiene una función definida a través de una integral

$$\phi(t) = \int_a^b \Phi(t,x)\,dx$$

se verifica la fórmula de derivación paramétrica

$$\phi'(t) = \int_a^b \frac{\partial\Phi}{\partial t}(t,x)\,dx$$

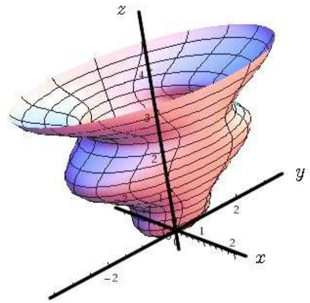

Figura 1: Superficie $\mathcal{S}$

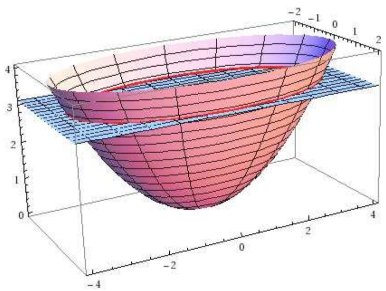

Figura 2: Intersección de $\mathcal{P}$ con $z=\pi$

PROBLEMAS

1. **(2 Ptos.)** Calcula la integral del campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(y^2 + \operatorname{sen}^2\left(\pi x^2+1\right)\right)\vec{\imath} + \left(z+\cos\left(y^2\right)\right)\vec{\jmath} + \left(y+\log\left(1+x^2\right)\right)\vec{\boldsymbol{k}}$$

a lo largo de la curva obtenida al intersectar el paraboloide de sección elíptica

$$\mathcal{P} = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2 + \frac{y^2}{4} - z = 0\right\}$$

con el plano $z=\pi$ (Figura 2). Justifica al procedimiento que uses.

Sigue detrás ⇒

Ayuda: Para describir una región cuya geometría se asemeja a un cilindro de sección elíptica pueden usarse coordenadas cilíndricas de la forma $(r,\ \theta,\ z)$, que se relacionan con las cartesianas mediante las igualdades $x = a(z)r\cos(\theta),\ y = b(z)r\,\mathrm{sen}(\theta),\ z = z$, donde $a(z),\ b(z)$ son los semiejes de las secciones elípticas que pueden variar con la altura z. El rango máximo de los valores que pueden tomar estas coordenadas es $0 < r < 1,\ 0 < \theta < 2\pi,\ z \in \mathbb{R}$. El jacobiano asociado $J = a(z)b(z)r$.

2. **(2 Ptos.)** Dada la superficie

$$\mathcal{A} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + \frac{z^2}{(2+x)^2} = 1\right\}$$

y el campo de temperaturas $T(x, y, z) = z(x^2 + (y-1)^2)$, determina:

(a) La temperatura de la región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ limitada por $\mathcal{A}$ calculando la integral de volumen

$$\int_\Omega T(x, y, z)\, dxdydz$$

(b) El flujo de calor a través de la superficie $\mathcal{A}$, suponiendo por simplicidad que la conductividad térmica es constante e igual a uno, es decir, calcula la integral de superficie

$$\int_{\mathcal{A}} \nabla T \cdot dS$$

Ayuda: Para describir una región cuya geometría se asemeja a un elipsoide con el tercer semieje variable,

$$Q = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c(x,y)^2} = 1\right\}$$

funcionan bien las coordenadas elipsoidales (r, θ, φ), que se relacionan con las cartesianas mediante las igualdades

$$x = ra\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\varphi), \quad y = rb\,\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}(\varphi), \quad z = rc(r\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\varphi), r\,\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}(\varphi))\cos(\varphi)$$

El rango máximo de los valores que pueden tomar estas coordenadas es $0 < r < 1$, $0 < \theta < 2\pi$, $0 < \varphi < \pi$ y el determinante jacobiano $J = abc(r\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\varphi), r\,\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}(\varphi))r^2\,\mathrm{sen}(\varphi)$.

3. Dada la función $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida mediante la expresión

$$f(x) = \begin{cases} 1/2, & -1 \le x \le 0 \\ \cos(\pi x), & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

(a) **(1 Pto.)** Calcula su serie de Fourier.

(b) **(0.75 Ptos.)** Estudia la convergencia puntual en el intervalo $[-1, 1]$ de la sucesión de las sumas parciales de la serie de Fourier de f. Dibuja las gráficas de f y de la función límite puntual.

(c) **(0.25 Ptos.)** Utiliza la convergencia puntual en $x = 1/2$ para comprobar que se verifica la igualdad

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

4. **(2 Ptos.)** La función $u(t, x)$ que proporciona la temperatura en el instante $t > 0$ en cada punto $x \in [0, 1]$ de una barra unidimensional de longitud unidad aislada en los extremos y de forma que el calor se transmite únicamente por conducción, es solución del problema

$$\left.\begin{array}{ll} u_t(t, x) = u_{xx}(t, x), & t > 0,\ 0 < x < 1 \\ u_x(t, 0) = u_x(t, 1) = 0, & t > 0 \end{array}\right\} \qquad (\mathcal{EC})$$

Utiliza el Método de separación de variables para determinar la expresión de $u(t, x)$ a partir de la distribución inicial de temperatura

$$u(0, x) = u_0(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 1/2 \\ -0.5\,\mathrm{sen}(2\pi x), & 1/2 \le x < 1 \end{cases}$$

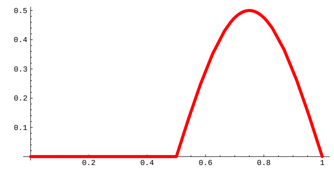

Figura 3: Distribución inicial de temperatura

Ayuda: Se verifican las fórmulas trigonométricas:

✓ $\mathrm{sen}(\alpha)\cos(\beta) = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{sen}(\alpha+\beta) + \mathrm{sen}(\alpha-\beta)\right)$

✓ $\mathrm{sen}(\alpha)\,\mathrm{sen}(\beta) = \dfrac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$

✓ $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \dfrac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right)$

Universidad Politécnica de Cartagena

Grado en Ingeniería Mecánica
“Matemáticas II”
Curso 2014/15 **(Grupos 1-2-3)**
Convocatoria de Septiembre (10/09/15)

Indicaciones

- Deberán responderse las cuestiones teóricas y **tres** problemas libremente elegidos de entre los cinco propuestos.
- En la primera hoja se indicará el nombre completo y el grupo.
- El examen aportará un **70%** de la nota final de la asignatura.
- La duración del examen es de **3.5** horas.

Cuestiones teóricas

1. Dado el campo vectorial expresado en coordenadas esféricas

$$\mathbf{F}(r,\theta,\varphi) = r\cos(\theta)\vec{e}_r$$

donde $\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}} = (\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\varphi),\ \mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}(\varphi),\ \cos(\varphi))$ es el primer vector de la base asociada a dichas coordenadas:

(a) **(0.5 Ptos.)** Escribe la expresión del campo vectorial $\mathbf{F}$ en coordenadas cartesianas.

(b) **(0.5 Ptos.)** Calcula, en coordenadas cartesianas y esféricas, la imagen asociada por el campo al punto cuyas coordenadas cartesianas son $(1,1,1)$.

(c) **(0.5 Ptos.)** Calcula la integral del campo $\mathrm{rot}\,\mathbf{F}$ sobre la superficie (Figura 1)

$$\mathcal{A} = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{(2+z)^2} + y^2 + z^2 = 1\right\}$$

2. Sean $f,g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ dos funciones derivables. Se define el campo vectorial $\mathbf{H}(x,y) = (f(x+y),\ g(x+y))$.

(a) **(0.5 Ptos.)** Determina las condiciones que deben verificar f y g para que el campo $\mathbf{H}$ sea incompresible y conservativo en $\mathbb{R}^2$.

(b) **(0.5 Ptos.)** ¿Existe algún campo con las características anteriores de forma que $\mathbf{H}(0,0) = (1,\pi)$? Justifica la respuesta.

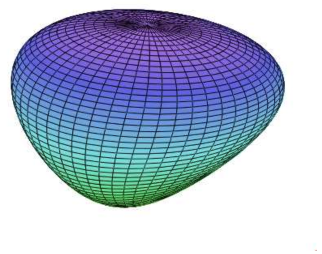

Figura 1: Superficie $\mathcal{A}$

Problemas

1. Resuelve los siguientes apartados, justificando los resultados que uses:

(a) **(1.25 Ptos.)** Sea γ la curva poligonal obtenida al unir los segmentos rectilíneos entre los puntos $(1,0)\to(0,1)\to(-1,0)\to(0,-1)\to(0,0)$. Determina el valor de la integral

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot ds$$

donde $\mathbf{F}(x,y) = \left(-y^2 + \log(1+x),\ \pi x + \mathrm{sen}(1+e^{y^2})\right)$.

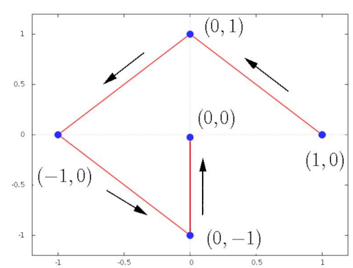

Figura 2: Curva poligonal γ

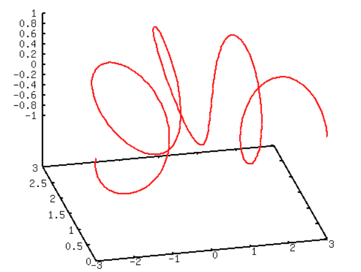

Figura 3: Curva β

(b) **(1.25 Ptos.)** Calcula la integral del campo vectorial

$$\mathbf{J}(x,y,z) = x^2 y\,\vec{\imath} + \left(\frac{x^3}{3} + z\right)\vec{\jmath} + y\,\vec{k}$$

a lo largo de la curva

$$\beta(t) = ((2+\cos(8t))\cos(t),\ (2+\cos(8t))\,\mathrm{sen}(t),\ \mathrm{sen}(8t)),\quad t\in[0,\pi]$$

Sigue detrás ⇒

2. **(2.5 Ptos.)** Sean el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = x\log\left(1+y^2\right)\vec{\mathbf{i}} + (x+2y\cos(z))\,\vec{\mathbf{j}} + \left(x^2+\cos(y^2-3z)\right)\vec{\boldsymbol{k}}$$

y la superficie

$$\mathcal{M} = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x-\cos(2z))^2 + (y-\operatorname{sen}(2z))^2 = \operatorname{sen}(z),\ 0<z<\pi/2\right\}$$

Calcula el flujo a través de $\mathcal{M}$,

$$\int_{\mathcal{M}} \mathbf{W}\cdot dS$$

del campo vectorial $\mathbf{W}(x,y,z) = x\,\vec{\mathbf{i}} + y\operatorname{sen}(z)\,\vec{\mathbf{j}} + \operatorname{rot}\mathbf{F}(x,y,z)$.

Ayuda: Si g es una función 2π-periódica $(g(\theta) = g(\theta+2\pi))$ e impar $(g(-\theta) = -g(\theta))$, entonces

$$\int_0^{2\pi} g(\theta)\,d\theta = 0$$

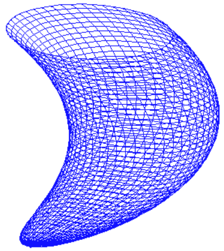

Figura 4: Superficie $\mathcal{M}$

3. **(2.5 Ptos.)** Calcula la circulación del campo vectorial

$$\mathbf{G}(x,y,z) = \left(y+\cos(1+x^2)\right)\vec{\mathbf{i}} + \left(x-z^2\right)\vec{\mathbf{j}} + (x\cos(y)+z)\,\vec{\boldsymbol{k}}$$

alrededor de la curva γ obtenida al intersectar el elipsoide

$$\mathcal{E} = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{3} = 1\right\}$$

con el plano $y=1$:

$$\int_\gamma \mathbf{G}\cdot ds$$

4. **(2.5 Ptos.)** El *centro de masas* de una región acotada $\Omega\subset\mathbb{R}^3$, cuya densidad viene dada por la función $\rho:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$, se define como el punto $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})\in\mathbb{R}^3$ de forma que

$$\bar{x} = \int_\Omega x\rho(x,y,z)\,dxdydz, \qquad \bar{y} = \int_\Omega y\rho(x,y,z)\,dxdydz, \qquad \bar{z} = \int_\Omega z\rho(x,y,z)\,dxdydz$$

Calcula las coordenadas del centro de masas de la región Ω limitada lateralmente por el cilindro de sección elíptica

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+\frac{y^2}{5} < 1\right\}$$

inferiormente por el plano horizontal $z=0$ y superiormente por el plano de ecuación $x+y+z=5$. La densidad se supone constante, $\rho=1$.

5. Dada la función $f:[-1,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ definida mediante la expresión

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1\le x<0 \\ \operatorname{sen}(4\pi x), & 0\le x\le 1/2 \\ 1/2, & 1/2<x\le 1 \end{cases}$$

(a) **(1 Pto.)** Dibuja la gráfica y calcula su serie de Fourier.

(b) **(1 Pto.)** Estudia la convergencia puntual en el intervalo $[-1,1]$ de la sucesión de las sumas parciales de la serie de Fourier de f y dibuja la gráfica de la función límite puntual.

(c) **(0.5 Ptos.)** Utiliza la convergencia puntual de la serie de Fourier en $x=1/2$ para obtener la identidad

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1,n\neq 4}^{\infty} \frac{(-1)^n\operatorname{sen}(n\pi/2)}{2n} + \frac{4\,(1-\cos(n\pi/2))}{16-n^2}$$

Ayuda: Se verifican las fórmulas trigonométricas:

- ✓ $\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)\right)$
- ✓ $\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$
- ✓ $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right)$