MATEMÁTICAS 2. Curso 2016/17.

Integración en varias variables.

1. Calcular para $\Omega = [0,1] \times [0,3]$ las integrales

$$\text{(a)} \iint_\Omega xy\,dxdy. \quad \text{(b)} \iint_\Omega xe^y\,dxdy. \quad \text{(c)} \iint_\Omega y^2 \sin x\,dxdy.$$

2. Calcular las integrales dobles siguientes en los recintos que se indican:

   a) $\iint_\Omega y\,dxdy$ en $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

   b) $\iint_\Omega (3y^3 + x^2)\,dxdy$ en $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

   c) $\iint_\Omega \sqrt{xy}\,dxdy$ en $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1,\ y^2 \leq x \leq y\}$.

   d) $\iint_\Omega ye^x\,dxdy$ en $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y^2\}$.

   e) $\iint_\Omega y + \log x\,dxdy$ en $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0{,}5 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq x\}$.

3. Calcular las integrales dobles siguientes en los recintos que a continuación se dan:

   a) $\iint_\Omega (4 - y^2)\,dxdy$ en el recinto limitado por las ecuaciones $y^2 = 2x$ e $y^2 = 8 - 2x$.

   b) $\iint_\Omega (x^4 + y^2)\,dxdy$ en el recinto limitado por $y = x^3$ e $y = x^2$.

   c) $\iint_\Omega (x + y)\,dxdy$ en el recinto limitado por $y = x^3$ e $y = x^4$ con $-1 \leq x \leq 1$.

   d) $\iint_\Omega (3xy^2 - y)\,dxdy$ en la región limitada por $y = |x|$, $y = -|x|$ y $x \in [-1,1]$.

4. Calcular la superficie de las siguientes regiones:

   a) Círculo de radio R.

   b) Elipse de semiejes a, b.

   c) La región limitada por las ecuaciones $x^2 = 4y$ y $2y - x - 4 = 0$.

   d) La región limitada por las ecuaciones $x + y = 5$ y $xy = 6$.

   e) La región limitada por las ecuaciones $x = y$ y $x = 4y - y^2$.

5. Calcular el volumen de los siguientes sólidos:

   a) El limitado por $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ y los planos de coordenadas.

   b) El tronco limitado superiormente por $z = 2x + 3y$ e inferiormente por el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$.

c) Esfera de radio R.

d) Cono de altura h y radio de la base R.

e) El tronco limitado superiormente por la ecuación $z = 2x + 1$ e inferiormente por el disco $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$.

6. Calcular cambiando a coordenadas polares:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy.$

b) $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dydx.$

c) $\displaystyle\int_{1/2}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)^{3/2}dydx.$

d) $\displaystyle\int_{0}^{1/2}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} xy\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy.$

7. Calcular para $\Omega = [0,1] \times [0,3] \times [-1,1]$ las integrales

$$\text{(a)} \iiint_\Omega xyz\,dxdydz. \quad \text{(b)} \iiint_\Omega xe^{y+z}dxdydz. \quad \text{(c)} \iiint_\Omega y^2z^3 \sin x\,dxdydz.$$

8. Calcular las integrales que a continuación se piden en los recintos correspondientes:

a) $\displaystyle\iiint_\Omega (y^3+z+x)dxdydz$ en $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$.

b) $\displaystyle\iiint_\Omega (y\sin z + x)dxdydz$ en $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq z \geq y^2,\ 0 \leq x,y \leq 1\}$.

c) $\displaystyle\iiint_\Omega x\,dxdydz$ en $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \geq y^2+x^2,\ 0 \leq z \leq 1\}$.

d) $\displaystyle\iiint_\Omega yxz\,dxdydz$ en $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -5 \leq z \leq y^2+x,\ -1 \leq x,y \leq 1\}$.

9. Calcular el volumen del sólido limitado superiormente por $z = 1$ e inferiormente por $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

10. Calcular el volumen del sólido limitado superiormente por el cilindro parabólico $z = 1 - y^2$, inferiormente por el plano $2x+3y+z+10 = 0$ y lateralmente por el cilindro circular $x^2+y^2+x = 0$.

11. Hallar el volumen del sólido limitado por los paraboloides de ecuaciones $z = 2 - x^2 - y^2$ y $z = x^2 + y^2$.

12. Calcular el volumen del sólido limitado superiormente por la superficie cilíndrica $x^2 + z = 4$, inferiormente por el plano $x + z = 2$ y lateralmente por los planos $y = 0$ e $y = 3$.

13. Haciendo uso de las coordenadas esféricas $x = r\sin\phi\cos\theta$, $y = r\sin\phi\sin\theta$ y $z = r\cos\phi$, calcular:

   a) El volumen de una esfera de radio R.
   b) $\displaystyle\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)dxdydz$ en el recinto $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 2\}$.
   c) El volumen del recinto del apartado (b).

14. Calcular el volumen del cuerpo limitado por las ecuaciones $z = x^2+4y^2$, el plano $z = 0$ y lateralmente por los cilindros $x = y^2$ y $x^2 = y$.

15. Calcular $\displaystyle\iint_\Omega e^{\frac{x-y}{x+y}}dxdy$ siendo Ω el triángulo formado por los ejes de coordenadas y la recta $x+y=1$.

16. Calcular el volumen comprendido entre los cilindros $z = x^2$ y $z = 4-y^2$.

17. Calcular el volumen del balón de Rugby de ecuaciones $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1$.

18. Calcular $\displaystyle\iint_\Omega xydxdy$ donde Ω es la región limitada por las curvas $y = 2x$, $y = 2x-2$, $y = x$ e $y = x+1$. Indicación: hacer el cambio de variable $x = u-v$, $y = 2u-v$.

19. Calcular el volumen encerrado por un cilindro de radio $r/2$ y una esfera de radio r cuyo centro está situado en un punto de la superficie del cilindro. Indicación: hacer el cambio a coordenadas cilíndricas.

20. Calcular
$$\iiint_\Omega \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$
donde Ω es la región limitada por las esferas $x^2+y^2+z^2 = a^2$ y $x^2+y^2+z^2 = b^2$, donde $0 < b < a$. Indicación: hacer el cambio a coordenadas esféricas.

21. Sea S un sólido de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$. Dado un punto $(x,y,z) \in S$ (si S es una lámina, se entenderá en este y en el resto de los ejercicios que $z = 0$), se define la densidad de masa en dicho punto, $\rho(x,y,z)$ como la masa por unidad de volumen o superficie. Se tiene entonces que la masa del sólido es
$$M = \iiint_S \rho(x,y,z)dxdydz$$
si se trata de un sólido tridimensional y
$$M = \iint_S \rho(x,y)dxdy$$
en caso de un sólido bidimensional. Calcular la masa de los siguientes sólidos:

   a) S es el círculo de centro $(0,0)$ y radio r con densidad de masa $\rho(x,y) = x^2+y^2$.
   b) S es la esfera centrada en $(0,0,0)$, con radio r y homogénea, es decir, con densidad de masa constante. Idem si la densidad de masa es $\rho(x,y,z) = x$.
   c) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$ con densidad de masa $\rho(x,y,z) = x^2+y^2$.

d) S está limitado por $z = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 4$ y $\rho(x, y, z) = z$.

22. Una lámina de masa M tiene la forma

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -R \leq x \leq R, 0 \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}\}$$

con $R > 0$. Hallar el centro de masas sabiendo que la densidad es proporcional a la distancia al borde curvado.

23. Sea S un sólido de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ con densidad de masa $\rho(x, y, z)$. Se define el centro de masas de S como el punto (x_M, y_M, z_M) donde

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{1}{M}\iiint_S x\rho(x, y, z)dxdydz, \\ y_M &= \frac{1}{M}\iiint_S y\rho(x, y, z)dxdydz, \\ z_M &= \frac{1}{M}\iiint_S z\rho(x, y, z)dxdydz. \end{aligned}$$

Si S es plano habría que considerar únicamente integrales dobles. Calcular los centros de masa del ejercicio 21.

24. Sea S un sólido de $\mathbb{R}^3$ o $\mathbb{R}^3$ y consideremos una recta en L en $\mathbb{R}^3$. Dado el punto $(x, y, z) \in S$, sea la distancia del punto (x, y, z) a la recta L. Se define entonces el momento de inercia de S con respecto a L como

$$I_L = \iiint_S \rho(x, y, z)r(x, y, z)^2 dxdydz,$$

donde $\rho(x, y, z)$ es la densidad de masa. Se define el radio de giro respecto de la recta L como $k = \sqrt{I/M}$, donde M es la masa de S. Obtener los momentos de inercia y los radios de giro siguientes:

25. Dado un sólido S de $\mathbb{R}^3$ o $\mathbb{R}^3$ y un sistema de referencia en su centro de masas, el momento de inercia respecto de los ejes x, y y z es

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \iiint_S \rho(x, y, z)(y^2 + z^2)dxdydz; \\ I_{yy} &= \iiint_S \rho(x, y, z)(x^2 + z^2)dxdydz; \\ I_{zz} &= \iiint_S \rho(x, y, z)(x^2 + y^2)dxdydz; \end{aligned}$$

donde $\rho(x, y, z)$ es la densidad de masa del sólido en el punto (x, y, z). Las cantidades

$$\begin{aligned} I_{xy} &= I_{yx} = \iiint_S \rho(x, y, z)xydxdydz; \\ I_{xz} &= I_{zx} = \iiint_S \rho(x, y, z)xzdxdydz; \\ I_{yz} &= I_{zy} = \iiint_S \rho(x, y, z)yzdxdydz; \end{aligned}$$

miden las perturbaciones provocadas en los ejes z, y y x al producirse el giro del cuerpo y se conocen con el nombre de productos de inercia. Cuando dichas cantidades son nulas sobre un eje, éste es lo que se llama un eje principal de inercia del sólido. Se construye el tensor de inercia como la matriz simétrica

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}.$$

Como podemos apreciar dicha matriz es diagonalizable. Los ejes principales de inercia del sólido estarán generados entonces por los vectores propios asociados a los valores propios de la matriz I, que además podrán ser elegidos perpendiculares si elegimos una base ortonormal al diagonalizar la matriz. Obtener los ejes principales de inercia de los siguientes sólidos:

a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$ y $\rho(x, y) = 1$

b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ y $\rho(x, y) = 1$.

c) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 10\}$ y $\rho(x, y) = 1$.

26. Dado un sólido S en $\mathbb{R}^3$ o $\mathbb{R}^2$, se define su momento de inercia respecto a un punto P como

$$I_P = \iiint_S \rho(x, y, z) r(x, y, z)^2 dxdydz,$$

donde $r(x, y, z)$ es la distancia del punto $(x, y, z) \in S$ a P. Demostrar que

$$2I_{C_M} = I_{xx} + I_{yy} + I_{zz},$$

donde C_M es el centro de masas del sólido.

27. **Teorema del eje perpendicular.** En la notación del ejercicio 25 probar que si S es un sólido plano, entonces

$$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}.$$

28. **Teorema del eje paralelo.** Sea S un sólido en $\mathbb{R}^3$ o $\mathbb{R}^3$ de masa M, y una recta l_M que pasa por el centro de masas del sólido. Sea l una recta paralela a l_M. Si I_M e I son los momentos del sólido respecto de l_M y l respectivamente y d es la distancia entre ambas rectas, demostrar que

$$I = I_M + d^2 M.$$

MATEMÁTICAS 2. Curso 2016/17.

CAMPOS ESCALARES Y VECTORIALES.

1. Calcular el gradiente de los siguientes campos escalares:

   a) $f(x,y,z) = e^{xyz}$.
   b) $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.
   c) $f(x,y,z) = \sin(xyz)$.
   d) $f(x,y,z) = \cos(x+y+z)$.

2. Calcular la divergencia y el rotacional de los siguientes campos:

   a) $\mathbf{F}(x,y,z) = (\sin x)\mathbf{i} + (\cos y)\mathbf{j}$.
   b) $\mathbf{F}(x,y,z) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$.
   c) $\mathbf{F}(x,y,z) = ax\mathbf{i} + by\mathbf{j} - c\mathbf{k}$, donce $a,b,c \in \mathbb{R}$.
   d) $\mathbf{F}(x,y,z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$.
   e) $\mathbf{F}(x,y,z) = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j}+xz\mathbf{k}$.
   f) $\mathbf{F}(x,y,z) = xyz\mathbf{i} + x^2y^2z^2\mathbf{j} + y^2z^3\mathbf{k}$.

3. Sea $f \in C^2(D,\mathbb{R})$. Se define el *Laplaciano de* f como la divergencia del gradiente de f, esto es

   $$\nabla^2 f =< \nabla, \nabla f >= \mathrm{div}(\nabla f).$$

   Una función f se dice *armónica* si $\nabla^2 f = 0$. Identificar cuáles de las siguientes funciones son armónicicas:

   a) $f(x,y) = e^x \cos y$.
   b) $f(x,y,z) = e^{-x}(\cos y - \sin y)$.
   c) $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$.

4. Dadas las funciones $\mathbf{F}(x,y,z) = 2\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + 3y\mathbf{k}$ y $\mathbf{G}(x,y,z) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, calcular:

   a) $\mathrm{rot}(\mathbf{F} \times \mathbf{G})$.
   b) $\mathrm{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G})$.

5. Sean f y g dos campos escalares, $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$ dos campos vectoriales y $\alpha \in \mathbb{R}$. Demostrar las siguientes propiedades:

   a) $\nabla(\alpha f) = \alpha\nabla(f)$.
   b) $\nabla(f+g) = \nabla(f) + \nabla(g)$.
   c) $\nabla(f/g) = (g\nabla(f) - f\nabla(g))/g^2$, $g \neq 0$.
   d) $\nabla(fg) = f\nabla(g) + g\nabla(f)$.
   e) $\mathrm{div}(\alpha\mathbf{F}) = \alpha\mathrm{div}(\mathbf{F})$.
   f) $\mathrm{div}(\mathbf{F}+\mathbf{G}) = \mathrm{div}(\mathbf{F}) + \mathrm{div}(\mathbf{G})$.
   g) $\mathrm{rot}(\mathbf{F}+\mathbf{G}) = \mathrm{rot}(\mathbf{F}) + \mathrm{rot}(\mathbf{G})$.
   h) $\mathrm{rot}(\alpha\mathbf{F}) = \alpha\mathrm{rot}(\mathbf{F})$.

i) $\operatorname{div}(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) =< \operatorname{rot}(\mathbf{F}),\mathbf{G} > - < \mathbf{F},\operatorname{rot}(\mathbf{G}) >$.

j) $\operatorname{rot}(f\mathbf{F}) = f\operatorname{rot}(\mathbf{F}) + (\nabla f\times\mathbf{F})$.

k) $\operatorname{div}(f\mathbf{F}) = f\operatorname{div}(\mathbf{F}) + < \nabla f,\mathbf{F} >$.

l) $\operatorname{div}(f\nabla g) = f\operatorname{div}(\nabla g) + < \nabla f,\nabla g >$.

6. Determinar si los siguientes campos vectoriales son conservativos y en caso de serlo obtener su función potencial:

   a) $\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{2x}{x^2+y^2+z^2}\mathbf{i} + \frac{2y}{x^2+y^2+z^2}\mathbf{j} + \frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\mathbf{k}$.

   b) $\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{1}{x}\mathbf{i} + \frac{1}{y}\mathbf{j} + \frac{1}{z}\mathbf{k}$.

   c) $\mathbf{F}(x,y,z) = (x+y^2)\mathbf{i} + 2yx\mathbf{j}$.

   d) $\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\mathbf{i} + \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\mathbf{j} + \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\mathbf{k}$.

   e) $\mathbf{F}(x,y,z) = (y+z)\mathbf{i} + (x+z)\mathbf{j} + (x+y)\mathbf{k}$.

   f) $\mathbf{F}(x,y,z) = (4x+2y+2z)\mathbf{i} + (2x+4y+2z)\mathbf{j} + (2x+2y+4z)\mathbf{k}$.

7. Sea $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ un campo escalar de clase C^2. Comprobar que

$$\frac{1}{x^2+y^2}\left(\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(x,y) + \frac{\delta^2 f}{\delta y^2}(x,y)\right) = 4\left(\frac{\delta^2 f}{\delta u^2}(u,v) + \frac{\delta^2 f}{\delta v^2}(u,v)\right)$$

   donde $u = x^2 - y^2$ y $v = 2xy$.

8. Demostrar que si $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ es un campo escalar de clase C^2 y se verifica la igualdad

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(x,y) + \frac{\delta^2 f}{\delta y^2}(x,y) = 0,$$

   entonces también se verifica

$$\frac{\delta^2 f}{\delta u^2}(u,v) + \frac{\delta^2 f}{\delta v^2}(u,v) = 0$$

   donde $x = u/\left(u^2+v^2\right)$ e $y = v/\left(u^2+v^2\right)$.

MATEMÁTICAS 2. Curso 2016/17.

Integral de línea.

1. Sea $f(x, y, z) = y$ y $\sigma(t) = (0, 0, t)$, $0 \leq t \leq 1$. Probar que $\int_\sigma f dt = 0$.

2. Calcular las siguientes integrales de trayectoria $\int_\sigma f dt$ donde:

   a) $f(x, y, z) = x + y + z$ y $\sigma(t) = (\sin t, \cos t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

   b) $f(x, y, z) = \cos z$ y σ el mismo de la parte (a).

   c) $f(x, y, z) = x \cos z$ y $\sigma(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$, $t \in [0, 1]$.

3. Calcula la longitud de las siguientes curvas:

   a) La circunferencia de radio R.

   b) $\sigma(t) = (t, \sin t, \cos t)$, $t \in [0, \pi]$.

   c) $\sigma(t) = (\sin(4t), 2t^2, \cos(4t))$, $t \in [0, 4\pi]$.

4. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Evaluar la integral de $\mathbf{F}$ a lo largo de las siguientes curvas:

   a) $\sigma(t) = (t, t, t)$, $0 \leq t \leq 1$.

   b) $\sigma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

   c) $\sigma(t) = (t^2, 3t, 2t^3)$, $-1 \leq t \leq 2$.

5. Calcular cada una de las siguientes integrales:

   a) $\int_\sigma xdy - ydx$, $\sigma(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

   b) $\int_\sigma xdx + ydy$, $\sigma(t) = (\cos \pi t, \sin \pi t)$, $0 \leq t \leq 2$.

   c) $\int_\sigma yzdx + xzdy + xydz$ donde σ es la unión de segmentos de recta que unen $(1, 0, 0)$ a $(0, 1, 0)$ y este último a $(0, 0, 1)$.

   d) $\int_\sigma x^2 dx - xydy + dz$ donde σ es el arco de la parábola $z = x^2$, $y = 0$ que une $(-1, 0, 1)$ con $(1, 0, 1)$.

6. Calcular las siguientes integrales curvilíneas:

   a) $\int_\sigma 2xyzdx + x^2 zdy + x^2 ydz$,

   b) $\int_\sigma (y + z)dx + (x + z)dy + (x + y)dz$,

   c) $\int_\sigma \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z}$,

   siendo σ una curva uniendo los puntos $(1, 1, 1)$ y $(-1, -1, 2)$.

7. Sean σ una curva de clase C^1 y $\mathbf{F}$ un campo vectorial. Demostrar:

   a) Si $\mathbf{F}$ es perpendicular a σ' a lo largo de σ, entonces

   $$\int_\sigma \mathbf{F} dt = 0.$$

   b) Si $\mathbf{F}$ es paralelo a σ' a lo largo de σ, es decir, $\mathbf{F}(\sigma(t)) = \lambda(t)\sigma'(t)$ con $\lambda(t) > 0$, entonces

   $$\int_\sigma \mathbf{F} dt = \int_\sigma \|\mathbf{F}\| \, ds.$$

8. Evaluar $\int_\sigma ydx + (3y^3 - x)dy + zdz$ para cada una de las trayectorias $\sigma(t) = (t, t^n, 0)$, $0 \leq t \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$.

9. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (3z^2 x + 2xy)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + 3zx^2\mathbf{k}$. Mostrar que la integral de $\mathbf{F}$ a lo largo del perimetro del cuadrado de vértices $(\pm 1, \pm 1, 5)$ es cero.

10. Calcular $\int_\sigma 2xyzdx + x^2 zdy + x^2 ydz$, donde σ es una curva sin autointersecciones que conecta $(1, 1, 1)$ con $(1, 2, 4)$.

11. Calcular mediante el Teorema de Green las siguientes integrales curvilineas:

    a) $\oint_\sigma 3ydx + 5xdy$, con σ la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 1.
    b) $\oint_\sigma x^2dy$ donde σ es el rectángulo de vértices $(0,0)$, $(a,0)$, (a,b) y $(0,b)$.
    c) $\oint_\sigma (xy+3y^2)dx + (5xy+2x^2)dy$ donde σ es $(x-1)^2+(y-2)^2=1$.

12. Hallar las áreas de la elipse de ecuaciones $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ y la astroide $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

13. Sean $P, Q : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dos funciones de clase $C^1(\Omega)$, con Ω un conjunto simplemente conexo, de manera que $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ en Ω. Demostrar que para cualesquiera dos curvas de Jordan σ_1 y σ_2 contenidas en Ω se verifica que
$$\oint_{\sigma_1} Pdx + Qdy = \oint_{\sigma_2} Pdx + Qdy.$$

14. Sea σ una curva de Jordan que no pasa por el origen y que interseca con cada recta que pasa por el origen en a lo sumo dos puntos. Calcular
$$\oint_\sigma -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$
en los caso en que σ encierre y no encierre al origen de coordenadas.

15. Idem para
$$\oint_\sigma -\frac{y^3}{(x^2+y^2)^2}dx + \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2}dy.$$

16. Sea D una región simplemente conexa. Supongamos que $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función armónica, esto es, de clase $C^2(D)$ y satisfaciendo la ecuación de Laplace
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in D.$$
Probar que
$$0 = \int_{\mathrm{Fr}(D)} \left(\frac{\partial f}{\partial y}dx - \frac{\partial f}{\partial x}dy\right) = 0.$$

17. Sea S una región simplemente conexa. Demostrar que el área de dicha región vale
$$A(S) = \frac{1}{2}\int_{\partial S} xdy - ydx.$$
Indicación: aplicar el teorema de Green al campo $(P(x,y) = -y,\ Q(x,y) = x)$.

18. Como aplicación del ejercicio anterior, calcula el área de la región limitada por la curva
$$\sigma(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t)\ ,\ 0 \le t \le 2\pi.$$

19. Sea σ la trayectoria dada por $\sigma(t) = (t^2, t, 3)$, $t \in [0,1]$.

    a) Hallar la longitud de σ, $l(\sigma)$.
    b) Dada $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, se define el valor promedio de f a lo largo de σ como $(\int_\sigma f ds)/l(\sigma)$. Calcular el valor promedio de $f_1(x,y,z) = x$, $f_2(x,y,z) = y$ y $f_3(x,y,z) = z$ (coordenadas promedio).

20. Sea Ω una lámina de densidad constante ρ de manera que su frontera es una curva de Jordan σ de clase C^1. Demostrar que los momentos de inercia de la lámina respecto a los ejes coordenados, I_y e I_x vienen dados por las fórmulas
$$I_x = -\frac{\rho}{3}\oint_\sigma y^3dx \qquad I_y = \frac{\rho}{3}\oint_\sigma x^3dy.$$

21. Sabiendo que la masa de las siguientes varillas homogéneas (densidad de masa constante), vale 10, determinar cuál es la densidad de masa en los siguientes casos:

    a) $\sigma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, \pi/2]$.
    b) $\sigma(t) = (2\cos t, 2\sin t, t^2)$, $t \in [0, 2\pi]$.
    c) $\sigma(t) = (t, \sin t, \cos t)$, $t \in [0, 3\pi/2]$.

MATEMÁTICAS 2. Curso 2016/17.

Integral de superficie.

1. Hallar el plano tangente de las siguientes superficies en el punto especificado:

   a) $x = 2u$, $y = u^2 + v$, $z = v^2$ en $(0, 1, 1)$.

   b) $x = u^2 - v^2$, $y = u + v$, $z = u^2 + 4v$ en $(-1/4, 1/2, 2)$.

2. ¿Son regulares las superficies del ejercicio anterior?

3. Sea $\Phi(u, v) = (u, v, f(u, v))$, con $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1. Demostrar que la ecuación del plano tangente en $\Phi(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$ coincide con el plano tangente de f en el punto (x_0, y_0).

4. Hallar una expresión para un vector unitario normal a la superficie

$$x = \cos v \sin u, \quad y = \sin v \sin u, \quad z = \cos u,$$

   para $(u, v) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$. Identificar la superficie.

5. Idem con la superficie

$$x = 3 \cos v \sin u, \quad y = 2 \sin v \sin u, \quad z = \cos u,$$

   para $(u, v) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$.

6. Idem para la superficie

$$x = \sin v, \quad y = u, \quad z = \cos v,$$

   para $(u, v) \in [-1, 3] \times [0, 2\pi]$.

7. Calcular el vector normal a la superficie y determinar la regularidad de la misma siendo

$$x = (2 - \cos v) \cos u, \quad y = (2 - \cos v) \sin u, \quad z = \sin v,$$

   para $(u, v) \in [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$.

8. Demostrar que el plano de ecuación $ax + by + cz = d$ es una superficie y calcular su vector normal.

9. Considerar la superficie de $\mathbb{R}^3$ dada por la parametrización

$$\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, \theta) \text{ con } (r, \theta) \in [0, 1] \times [0, 4\pi].$$

   Se pide:

   a) Esbozar una gráfica de la misma.

   b) Hallar una expresión para el vector normal unitario.

   c) Hallar la ecuación del plano tangente en un punto (x_0, y_0, z_0) de la superficie.

   d) Si (x_0, y_0, z_0) es un punto de la superficie, mostrar que el segmento horizontal que va del eje z a dicho punto está contenido en la superficie y en el plano tangente de la superficie en dicho punto.

10. Hallar:

    a) Una parametrización para el hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 25$.

    b) El vector normal unitario en cada punto de dicha superficie.

    c) Hallar el plano tangente a la superficie en un punto $(x_0, y_0, 0)$.

11. Hallar las áreas de las superficies de los ejercicios 6, 4, 7 y 9.

12. Sea $\Phi(u, v) = (u - v, u + v, uv)$ definido en el disco unitario D del plano uv. Hallar el área de $\Phi(D) = \text{graf}\Phi$.

13. Hallar una parametrización de la superficie $x^2 - y^2 = 1$ donde $x > 0$, $1 \leq y \leq 2$ y $0 \leq z \leq 1$. Una vez obtenida, calcular el área de dicha superficie.

14. Sea S la superficie obtenida al girar la gráfica de la función $y = f(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$, alrededor del eje x. Demostrar que el área de la misma puede expresarse según la fórmula

$$2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}dx.$$

15. Sea S la superficie obtenida al girar la gráfica de la función $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, $a > 0$, alrededor del eje y. Demostrar que el área de la misma puede expresarse según la fórmula

$$2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + f'(x)^2}dx.$$

16. Sea $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ una curva de Jordan de clase C^1, de manera que su imagen está en el semiplano derecho del plano xy. Demostrar que el área de la superficie generada al rotar la imagen de σ alrededor del eje y es igual a $2\pi\overline{x}l(\sigma)$ donde $l(\sigma)$ es la longitud de la curva σ y $\overline{x}$ es la coordenada promedio x a lo largo de σ.

17. Consideremos el Toro de ecuaciones

$$x = (R - \cos v)\cos u, \quad y = (R - \cos v)\sin u, \quad z = \sin v,$$

para $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$. Probar que su área es $4\pi^2 R$.

18. Calcular $\iint_S x dS$, donde S es el triángulo con vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$.

19. Dada una superficie S, con densidad de masa por unidad de superficie $\rho(x, y, z)$ para cada $(x, y, z) \in S$, se puede calcular la masa de la misma con la fórmula

$$\iint_S \rho(x, y, z)dS.$$

Sea $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^3$ una parametrización de la helicoide $S = \Phi(\Omega) = \mathrm{graf}\Phi$ dada por $\Omega = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ y $\Phi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \theta)$. Calcular la masa de una helicoide que tenga densidad de masa $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$.

20. Calcular $\iint_S (x + y + z)dS$ donde S es la esfera de radio 1.

21. Calcular $\iint_S z dS$, donde S es la superficie $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \leq 1$.

22. Calcular $\iint_S z^2 dS$, donde S es la frontera del cubo $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.

23. Hallar la masa de una superficie esférica de radio R tal que en cada punto (x, y, z) de la misma la densidad de masa es igual al cuadrado de la distancia al centro de la esfera.

24. Sea la temperatura en un punto de $\mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = 3x^2 + 3z^2$. El flujo de calor a través de una superficie S se define como $\iint_S -(\nabla T)dS$. Calcular el flujo de calor a través de la superficie $x^2 + z^2 = 2$, $0 \leq y \leq 1$.

25. Idem pero con temperatura $T(x, y, z) = x$ siendo S la esfera de radio uno.

26. Sea S la superficie cerrada formada por el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$ y su base $x^2 + y^2 = 1$. Sea $\mathbf{E}$ el campo eléctrico dado por $\mathbf{E}(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$. Hallar el flujo eléctrico hacia afuera de S.

27. Evaluar $\iint_S \mathrm{rot}\mathbf{F}dS$, donde S es la superficie $x^2 + y^2 + 3z^2 = 1$, $z \leq 0$ y $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, x, zx^3y^2)$. (Tomar el vector normal unitario hacia afuera de S).

28. Calcular el flujo del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, 2x, -z)$ sobre la porción del plano $2x + y = 6$ situada en el primer octante y limitada por el plano $z = 4$.

29. Hallar el flujo del rotacional de $\mathbf{V}(x, y, z) = (y - 2x, yz^2, -y^2z)$ hacia afuera de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$.

30. Calcular el flujo del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, xy, xyz)$ hacia afuera de la superficie total del cuerpo limitado por las superficies $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, $x = 0$, $y = 0$ y $z = c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}^+$.

31. Idem para $\mathbf{F}(x, y, z) = (6z, 2x + y, -x)$ sobre la cara de la superficie del cilindro $x^2 + z^2 = 9$ limitada por los plano coordenados (primer octante) y el plano $y = 8$.

32. La lluvia puede ser interpretada como un fluido uniforme que fluye verticalmente hacia abajo y que por tanto, puede ser descrita por el campo $\mathbf{F}(x,y,z) = (0,0,-1)$. Hallar el flujo de lluvia a través del cono $z^2 = x^2+y^2$, $x^2+y^2 \leq 1$, $z \geq 0$. Si debido al viento, la lluvia cae con una inclinación de 45^o y se describe por $\mathbf{F}(x,y,z) = -(\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$, ¿cuál es ahora el flujo a través del cono?

33. Sean
$$S_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1 \ , \ 0 \leq z \leq 1\right\},$$
$$S_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+(z-1)^2 = 1 \ , \ z \geq 1\right\}$$
y $S = S_1 \cup S_2$. Calcular $\iint_S \mathrm{rot}\mathbf{F} dS$ donde $\mathbf{F}(x,y,z) = (zx+z^2y+x,\ z^3yx+y,\ z^4x^2)$.

34. Calcula $\iint_S \mathrm{rot}\mathbf{F} dS$ donde S es la semiesfera $\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1,\ x \geq 0\}$ y $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^3, -y^3, 0)$.

35. Usar el Teorema de la divergencia para calcular
$$\iint_S (x^2+y+z) dS$$
siendo $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\right\}$.

36. Sea S una superficie cerrada. Usar el Teorema de la divergencia para probar que si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial de clase C^2, entonces
$$\iint_S \mathrm{rot}\mathbf{F} dS = 0.$$

37. Sea S una superficie de $\mathbb{R}^3$ tal que encierra un volumen V. Probar las fórmulas de Green
$$\iint_S < f\nabla g, \mathbf{n} > dS = \iiint_V (f\Delta g + < \nabla f, \nabla g >) dxdydz$$
y
$$\iint_S < (f\nabla g - g\nabla f), \mathbf{n} > dS = \iiint_V (f\Delta g - g\Delta f) dzdydz$$
siendo $f, g : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son funciones de clase C^2 en el interior de D, con $S \subset D$, y $\mathbf{n}$ el vector normal exterior a la superficie. El operador
$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$
es el laplaciano de f.

38. Dado el campo escalar $f(x,y,z) = x^2+2y^2+3z^2$ y un campo vectorial $\mathbf{F}$, calcular el flujo del campo $\nabla f + \nabla \times \mathbf{F}$ a través de la esfera $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2$.

39. Siendo $\mathbf{F}(x,y,z) = (x+2y, -3z, x)$, calcular el flujo del rotacional de $\mathbf{F}$ a través de la superficie $2x+y+2z = 6$ limitada por los planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 2$.

40. Calcular el flujo del campo $\mathbf{F}(x,y,z) = (18z, -12, 3y)$ sobre la superficie del tetraedro limitado por los ejes coordenados y el plano $2x+3y+6z = 12$.

41. Evaluar $\iint_S \mathbf{F} dS$ donde $\mathbf{F}(x,y,z) = (xy^2, x^2y, y)$ y S es la superficie del cilindro $x^2+y^2 = 1$ acotada por los planos $z = 1$ y $z = -1$, incluyendo los trozos $x^2+y^2 \leq 1$ cuando $z = \pm 1$.

42. Evaluar $\iint_S \mathbf{F} dS$ donde $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,-z)$ y S es la frontera del cubo $[0,1]^3$.

43. Evaluar $\iint_S \mathbf{F} dS$ donde $\mathbf{F}(x,y,z) = (1, 1, z(x^2+y^2)^2)$ y S es la superficie del cilindro $x^2+y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$.

44. Demostrar que si S es una superficie cerrada que encierra un volumen V, entonces
$$\iiint_V < \nabla f, \mathbf{F} > dxdydz = \iint_S f\mathbf{F} dS - \iiint_V f \mathrm{div}\mathbf{F} dxdydz,$$
siendo f y $\mathbf{F}$ campos escalares y vectoriales suficientemente derivables.