MATEMÁTICAS 2. Curso 2016/17

EXAMEN FINAL. 25–6–2017

- Nombre y apellidos:
- DNI:
- En los ejercicios prácticos se valorará que estén explicados, indicando qué resultado o propiedad se ha usado para resolverlo, justificando que dicho resultado se puede utilizar.

1. **(1 punto)** Enunciar el Teorema de Stokes definiendo todos los conceptos que aparecen en el mismo. Poner un ejemplo en que se aplique.

   Solución. Teoría.

2. **(1 punto)** Explicar la diferencia entre condiciones de Neumann y Dirichlet en ecuaciones en derivadas parciales y en qué afecta a la hora de resolver las mismas mediante el método de separación de variables.

   Solución. Teoría.

3. **(2 puntos)** Sea S la superficie formada por la unión de las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z \geq 0$ y $x^2 + y^2 = 9$, $-10 \leq z \leq 0$. Dado el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + y, z, xyz)$$

se pide calcular

$$\int\int_S \operatorname{rot}(\mathbf{F}) dS.$$

Solución. Sea S_1 la superficie $x^2+y^2 \leq 9,\ z = -10$, tapa inferior del cilindro $x^2+y^2 = 9$, $-10 \leq z \leq 0$. La superificie encierra un volumen y podemos aplicar el Teorema de Gauss, por lo que se obtiene

$$\int\int_{S\cup S_1} \operatorname{rot}(\mathbf{F}) dS = \int\int\int_V \operatorname{div}(\operatorname{rot}(\mathbf{F})) dxdydz = \int\int\int_V 0 dxdydz = 0,$$

por lo que

$$0 = \int\int_{S\cup S_1} \operatorname{rot}(\mathbf{F}) dS = \int\int_S \operatorname{rot}(\mathbf{F}) dS + \int\int_{S_1} \operatorname{rot}(\mathbf{F}) dS$$

y por tanto

$$\int\int_S \operatorname{rot}(\mathbf{F}) dS = -\int\int_{S_1} \operatorname{rot}(\mathbf{F}) dS$$

con la orientación exterior. Dado que la superficie S_1 es la gráfica de la función $z = -10$ definida sobre el círculo $x^2 + y^2 \leq 9$, podemos aplicar el Teorema de Stokes. Antes, parametrizamos la curva frontera como $\gamma(t) = (3\cos t, 3\sin t, -10)$, $t \in [0, 2\pi]$, aunque su orientación no es compatible con la orientación exterior de la superficie. Para solucionar este problema cambiamos el signo y obtenemos

$$\begin{aligned}
\int\int_{S_1} \operatorname{rot}(\mathbf{F}) dS &= -\int_\gamma \mathbf{F} dl \\
&= -\int_0^{2\pi} \left\langle (9\cos^2 t + 3\sin t, -10, -90\cos t \sin t), (-3\sin t, 3\cos t, 0) \right\rangle dt \\
&= -\int_0^{2\pi} (-27\cos^2 t \sin t - 9\sin^2 t - 30\cos t) dt = 9\pi.
\end{aligned}$$

Así

$$\int\int_S \text{rot}(\mathbf{F})dS = -9\pi.$$

4. **(2 puntos)** Dada una curva de Jordan γ, probar que el área que encierra puede calcularse como

$$A = \int_\gamma xdy.$$

Como aplicación, deducir el área del círculo a partir de la fórmula anterior.

Solución. Aplicamos el Teorema de Green para obtener

$$\int_\gamma xdy = \int\int_{I(\gamma)} (Q_x - P_y)\, dxdy = \int\int_{I(\gamma)} 1dxdy,$$

que como sabemos es el área del recinto $I(\gamma)$ delimitado por la curva γ. Si parametrizamos el círculo como

$$\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t),\ \ t \in [0, 2\pi],$$

que está orientada positivamente, aplicamos la fórmula del enunciado y obtenemos

$$A = \int_\gamma xdy = \int_0^{2\pi} R\cos t R\cos t dt = R^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \pi R^2.$$

5. **(2 puntos)** Resolver

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{yy},\ t > 0,\ y \in (0, 2\pi), \\ u(t, 0) = u(t, 2\pi) = 0,\ t > 0, \\ u(0, y) = \sin(30y),\ y \in (0, 2\pi), \\ u_t(0, y) = 0, y \in (0, 2\pi). \end{cases}$$

Solución. Siguiendo el método de separación de variables, suponemos que la solución es de la forma $u(t, y) = T(t)Y(y)$, por lo que aplicando el método obtenemos el problema de contorno

$$\begin{cases} Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, \\ Y(0) = Y(2\pi) = 0, \end{cases}$$

con solución

$$Y_n(y) = \sin\left(\frac{n}{2}y\right),\ \lambda = \frac{n^2}{4}, n = 1, 2, ...$$

y la ecuación

$$T''(t) + \frac{n^2}{4}T(t) = 0,$$

con solución general

$$T_n(t) = a_n \cos\left(\frac{n}{2}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n}{2}t\right), n = 1, 2, ...$$

Proponemos la solución formal

$$u(t, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n}{2}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n}{2}t\right)\right) \sin\left(\frac{n}{2}y\right).$$

Tomamos las condiciones iniciales

$$u(0, y) = \sin(30y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n}{2}y\right),$$

por lo que

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(30y) \sin\left(\frac{n}{2}y\right) dy = \left\{ \begin{array}{l} 1 \ si \ n = 60, \\ 0 \ si \ n \neq 60. \end{array} \right.$$

Por otra parte, derivando formalmente

$$u_t(t,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-a_n \frac{n}{2} \sin\left(\frac{n}{2}t\right) + b_n \frac{n}{2} \cos\left(\frac{n}{2}t\right) \right) \sin\left(\frac{n}{2}y\right)$$

y particularizando

$$u_t(0,y) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n}{2} \sin\left(\frac{n}{2}y\right),$$

por lo que

$$b_n = 0.$$

Así, la solución del problema es

$$u(t,y) = \cos(30t) \sin(30y).$$