Transformadas Integrales

Jose S. Cánovas Peña

2 de octubre de 2014

Advertencia.

- Estos apuntes **no** han sido corregidos. Cualquier errata o error que se detecte, por favor, escribid a mi dirección jose.canovas@upct.es, para que en un futuro se pueda subsanar.
- **No** son los apuntes de la asignatura. Son una guía que no tiene porqué corresponderse al cien por cien con lo explicado en clase.
- Se ha utilizado el símbolo $\overset{*}{=}$ para denotar un paso en alguna demostración que, siendo cierto, no está bien justificado. Normalmente cuando se trata de permuta de límites, como una integral con un sumatorio. Para un estudio de las pruebas rigurosas al cien por cien nos remitimos a la bibliografía al final de estas notas.

Índice general

Capítulo 1

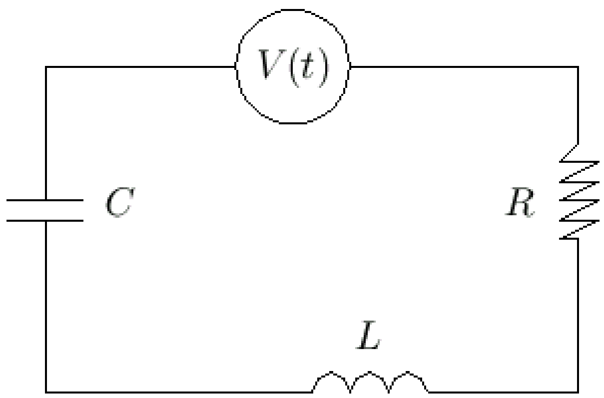
Transformada de Laplace

Sumario. Funciones continuas a trozos. Defínción de Transformada de Laplace. Propiedades Básicas. Transformada de Fourier inversa: propiedades básicas. Fórmula de inversión compleja. Aplicaciones a la resolución de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.

1.1. Introducción

Vamos a desarrollar un tema sobre la Transformada de Laplace y su aplicación a la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Estas ecuaciones surgen de manera natural en el contexto de los circuitos eléctricos.

Consideremos por ejemplo el típico circuito LRC de la figura



donde la inductancia L, la resistencia R y la capacidad de condensador C se consideran constantes. Se tiene entonces que la carga $q(t)$ que circula por el circuito está dada por la ecuación

$$Lq''(t) + Rq'(t) + q(t)/C = V(t),$$

y dado que la intensidad $I(t)$ es la derivada de la carga, ésta puede calcularse por la ecuación

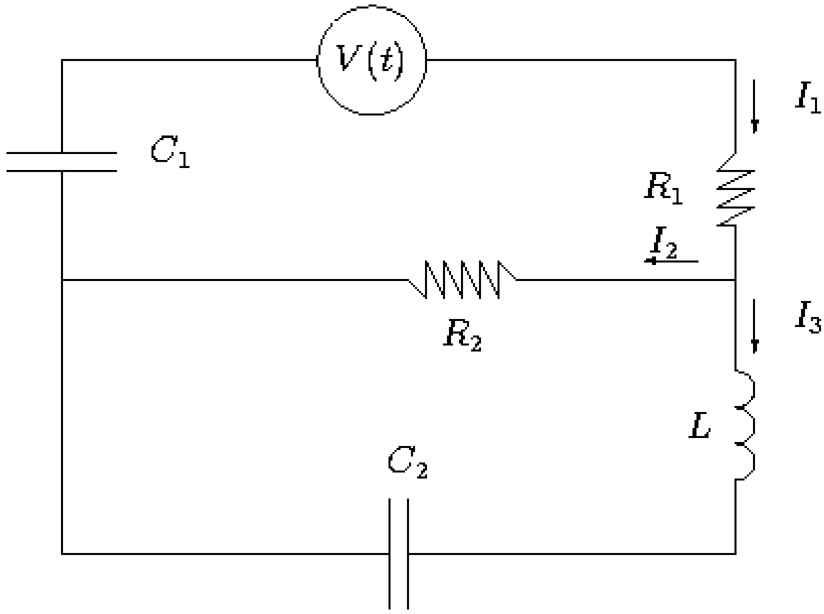
$$LI'(t) + RI(t) + \int_0^t I(s)ds/C = V(t),$$

o equivalentemente con la ecuación diferencial

$$LI''(t) + RI'(t) + I(t)/C = V'(t),$$

en el caso en que $V(t)$ sea una función derivable.

De forma similar, si tenemos un circuito con varias ramas y más elementos, como por ejemplo



podemos deducir a partir de las leyes de Kirchoff que las intensidades que circulan por los hilos eléctricos del circuito vienen dadas por

$$\begin{cases} 0 = I_1 - I_2 - I_3, \\ V'(t) = I_1' R_1 + I_1/C_1 + I_2' R_2, \\ 0 = -I_2' R_2 + I_3'' L + I_3/C_2, \end{cases}$$

Si suponemos los elementos del circuito constantes, salvo a lo mejor el voltaje $V(t)$, que supondremos una función derivable, tenemos un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.

La Transformada de Laplace es una herramienta que permite transformar los problemas anteriores en problemas algebraicos y, una vez resuelto este problema algebraico más fácil a priori de resolver, calcular a partir de la solución del problema algebraico la solución del problema de ecuaciones diferenciales.

Esta es la forma en que los ingenieros abordan el estudio de estos problemas, como pone de manifiesto las referencias [Oga1], [Sen] o [Jam]. Además este método es explicado en algunos libros de ecuaciones diferenciales como [BoPr], [Bra], [Jef] o [**?**].

Sin embargo, para entender en su justa dimensión la Transformada de Laplace hay que dominar contenidos básicos de variable compleja que nuestros alumnos ya han estudiado durante el curso (ver por ejemplo [?]). Así, vamos a presentar la Transformada de Laplace en un primer lugar usando los conocimientos que el alumno tiene de funciones de variable compleja y una vez explicada ésta, procederemos a indicar algunas aplicaciones a las ecuaciones y sistemas citadas anteriormente. Nuestros alumnos también deben conocer y dominar contenidos relativos a integrales impropias que fueron explicados en la asignatura de primer curso *fundamentos matemáticos de la ingeniería.*

A modo de introducción histórica, diremos que la expresión

$$F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-zt} f(t)$$

fué acuñada en primer lugar por Pierre–Simon Laplace en 1782. Su utilización dentro de la técnica se debe en su forma rigurosa a Thomas Bromwich, el cual formalizó utilizando las funciones de variable compleja y la Transformada de Laplace un cálculo operacional inventado por Oliver Heaviside para la resolución de circuitos eléctricos.

1.2. Funciones continuas a trozos. Función de Heaviside

Previamente a introducir la Transformada de Laplace, hemos de concretar qué tipo de funciones vamos a considerar para nuestros problemas. Las funciones que van a ser de importancia dentro de la ingeniería son aquellas llamadas *continuas a trozos*, que a continuación definimos.

Dados los números reales $a < b$, se dice que la función $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ es *continua a trozos* si existe una partición de $[a, b]$, $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$, de manera que f es continua en (t_i, t_{i+1}), $0 \leq i < n$, y existen y son finitos los límites laterales de f en cada uno de los puntos t_i, $0 \leq i \leq n$.

Una función $f : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ se dice que es *continua a trozos* si para cada intervalo compacto $[a, b] \subset [0, +\infty)$ se verifica que $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ es continua a trozos.

Uno de los primeros ejemplos de función continua a trozos es

$$h_a : [0, +\infty) \to \mathbb{C},$$

donde a es un número real mayor o igual que cero. Esta función está definida por

$$h_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a, \\ 1 & \text{si } t \geq a, \end{cases}$$

y se conoce en ingeniería con el nombre de *función de Heaviside.*

Físicamente, la función de Heaviside realiza la función de interruptor, de manera que si $f : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ es una función continua se tiene que $h_a \cdot f$ es la función

$$(h_a \cdot f)(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a, \\ f(t) & \text{si } t \geq a, \end{cases}$$

lo que representa que la función h_a "enciende" a la función o señal f en el instante de tiempo $t = a$. Adicionalmente, si consideramos $0 \leq a < b$ y la función $h_a - h_b : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$, ésta tiene la forma

$$(h_a - h_b)(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin [a, b), \\ 1 & \text{si } t \in [a, b). \end{cases}$$

Así, si tomamos ahora la función $h_a \cdot f - h_b \cdot f$, la función h_b tiene el efecto físico de "apagar" la función f, ya que

$$(h_a \cdot f - h_b \cdot f)(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a, \\ f(t) & \text{si } a \leq t < b, \\ 0 & \text{si } b \leq t. \end{cases}$$

Además de estas interpretaciones físicas, la función de Heaviside es útil para describir funciones continuas a trozos que a su vez sean continuas por la derecha. Por ejemplo, la función

$$f(f) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t < 1, \\ t - 1 & \text{si } 1 \leq t < 3, \\ \sin t & \text{si } 3 \leq t, \end{cases}$$

puede escribirse como

$$f(t) = t \cdot [h_0(t) - h_1(t)] + (t - 1) \cdot [h_1(t) - h_3(t)] + \sin t \cdot h_3(t).$$

Esta forma de describir funciones continuas a trozos será útil en los siguientes apartados del tema debido a las propiedades de la Transformada de Laplace que posteriormente estudiaremos. Por otra parte hemos de comentar que al venir la Transformada de Laplace definida como una integral, la condición de ser la función continua por la derecha es irrelevante y todas las funciones pueden tomarse de esta forma.

1.3. Definición de Transformada de Laplace

1.3.1. Definición y primeros ejemplos

Sea $f : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ una función localmente integrable, esto es, existe la integral de Riemann de f en todo intervalo compacto $[0, a] \subset [0, +\infty)$. Se define la *Transformada de Laplace* de f en $z \in \mathbb{C}$ como

$$\mathcal{L}[f](z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt, \tag{1.1}$$

siempre que tal integral impropia exista. Como el alumno debe conocer, la convergencia de la integral

$$\int_0^{+\infty} |e^{-zt} f(t)| dt$$

implica la convergencia de la integral (1.1). Denotaremos por $\mathcal{D}_f$ el dominio de $\mathcal{L}[f]$, es decir, el subconjunto del plano complejo donde la expresión (1.1) tiene sentido.

A continuación vamos a ver ejemplos de Transformadas de Laplace de algunas funciones elementales.

- **Función de Heaviside**. Sea $a \geq 0$ y consideremos la función de Heaviside h_a definida anteriormente. Entonces para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} z > 0$ se verifica

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[h_a](z) &= \int_0^{+\infty} e^{-zt} h_a(t) dt = \int_a^{+\infty} e^{-zt} dt \\
&= \lim_{x \to +\infty} \int_a^x e^{-zt} dt = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^{-za}}{z} - \frac{e^{-zx}}{z} \right) = \frac{e^{-za}}{z}.
\end{aligned}$$

En particular, cuando $a = 0$ obtenemos

$$\mathcal{L}[h_0](z) = \frac{1}{z}.$$

- **Función exponencial**. Sea $\omega \in \mathbb{C}$ y consideremos la función exponencial $f(t) = e^{\omega t}$. Se verifica entonces para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} \omega$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f](z) &= \int_0^{+\infty} e^{-zt} e^{\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(z-\omega)t} dt \\
&= \lim_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-(z-\omega)t} dt = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{z-\omega} - \frac{e^{-(z-\omega)x}}{z-\omega} \right) = \frac{1}{z-\omega}.
\end{aligned}$$

En particular, si $\omega = 0$ se verifica que $f(t) = 1$, con lo que nuevamente

$$\mathcal{L}[h_a](z) = \frac{1}{z} \text{ para todo } z \in \mathbb{C} \text{ tal que } \operatorname{Re} z > 0.$$

- **Potencias**. Sea n un número natural y consideremos la función $f_n(t) = t^n$. Vamos ver que la Transformada de Laplace de f_n viene dada por la expresión

$$\mathcal{L}[f_n](z) = \frac{n!}{z^{n+1}} \text{ para todo } z \in \mathbb{C} \text{ tal que } \operatorname{Re} z > 0.$$

Para ver esto procedemos por inducción calculando en primer lugar la Transformada de f_1. Integrando por partes obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f_1](z) &= \int_0^{+\infty} e^{-tz} t dt = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-tz} t dt \\
&= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{xe^{-xz}}{z} + \frac{1 - e^{-xz}}{z^2} \right) = \frac{1}{z^2},
\end{aligned}$$

A continuación, por la hipótesis de inducción supongamos que $\mathcal{L}[f_n](z) = n!/z^{n+1}$ y calculemos la Transformada de f_{n+1}. Consideremos

$$\mathcal{L}[f_{n+1}](z) = \int_0^{+\infty} e^{-tz} t^{n+1} dt = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-tz} t^{n+1} dt. \tag{1.2}$$

Tomando partes en la expresión anterior

$$\int_0^x e^{-tz} t^{n+1} dt = \frac{x^{n+1} e^{-xz}}{-z} + \frac{n+1}{z} \int_0^x e^{-tz} t^n dt. \tag{1.3}$$

Combinando (1.2) y (1.3) concluimos que

$$\mathcal{L}[f_{n+1}](z) = \frac{n+1}{z}\mathcal{L}[f_n](z) = \frac{(n+1)!}{z^{n+2}}.$$

- **Funciones periódicas**. Las funciones periódicas son bastante importantes en ingeniería debido a que su periodicidad las hace controlables. Sea $f : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ una función periódica con periodo T. Entonces

$$\int_0^{nT} e^{-tz} f(t)dt = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{jT}^{(j+1)T} e^{-tz} f(t)dt = \sum_{j=0}^{n-1} e^{-jzT} \int_0^T e^{-tz} f(t)dt$$

realizando cambios de variable en las integrales y usando que la función es periódica de periodo T. Tomando límites cuando $n \to +\infty$, se verifica para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} z > 0$ la relación

$$\mathcal{L}[f](z) = \frac{1}{1 - e^{-zT}} \int_0^T e^{-tz} f(t)dt.$$

1.3.2. Dominio de definición de la Transformada de Laplace

Los ejemplos que anteriormente hemos explicado ponen de manifiesto que la función Transformada de Laplace de una función $f : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ no tiene porque estar definida en todo el plano complejo. Vamos a estudiar con precisión cómo es el dominio de definición de estas funciones, pero consideraremos una clase especial de funciones que tienen lo que llamaremos *orden exponencial.*

Una función $f : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ se dice que tiene orden exponencial si existen constantes $A > 0$ y $B \in \mathbb{R}$ de manera que para todo $t \geq 0$ se satisface la condición

$$|f(t)| \leq Ae^{tB}. \tag{1.4}$$

Denotaremos por $\mathcal{E}$ el conjunto de funciones continuas a trozos con orden exponencial, que serán las funciones con las que trabajaremos a partir de ahora. El siguiente resultado ofrece una primera aproximación sobre el dominio de definición de la Transformada de Laplace de funciones con orden exponencial.

Proposition 1 *Sea $f : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ una función continua a trozos cumpliendo la condición (1.4). Entonces $\mathcal{L}[f](z)$ está definida para todo número complejo z tal que* $\operatorname{Re} z > B$.

Proof. Vamos a ver que la función $e^{-zt}f(t)$ es absolutamente integrable para todo complejo z tal que $\operatorname{Re} z > B$. Para ello consideramos

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} |e^{-zt} f(t)|dt &= \int_0^{+\infty} e^{-\operatorname{Re} zt} |f(t)|dt \\
&\leq A \int_0^{+\infty} e^{-(\operatorname{Re} z - B)t} dt \\
&= \lim_{x \to +\infty} A \int_0^x e^{-(\operatorname{Re} z - B)t} dt \\
&= A \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{B - \operatorname{Re} z} - \frac{e^{-x(\operatorname{Re} z - B)}}{B - \operatorname{Re} z} \right) = \frac{1}{B - \operatorname{Re} z},
\end{aligned}$$

con lo que la Transformada de Laplace existe en el subconjunto $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > B\}$. ■

Este resultado prueba que $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > B\} \subset \mathcal{D}_f$. Si definimos

$$\rho = \inf\{B \in \mathbb{R} : \exists A > 0 \text{ con } |f(t)| \leq Ae^{Bt} \text{ para todo } t \geq 0\},$$

y denotamos por

$$\mathcal{D}_f^* = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \rho\}.$$

La Proposición 1 nos asegura que $\mathcal{D}_f^* \subseteq \mathcal{D}_f$.

1.4. Propiedades de la Transformada de Laplace

Una vez estudiada la definición de Transformada de Laplace y caracterizadas algunas condiciones para que una función f tenga Transformada de Laplace $\mathcal{L}[f]$ definida en un dominio del plano complejo $\mathcal{D}_f$, pasamos a estudiar algunas propiedades básicas de esta transformada integral. La primera propiedad que vamos a estudiar es la linealidad.

1.4.1. Linealidad

Esta propiedad será muy útil para resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, a la vez que permitirá el cálculo de la transformada de algunas funciones.

Theorem 2 *Sean $f, g \in \mathcal{E}$ y $a, b \in \mathbb{C}$. Entonces para todo $z \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ se verifica que*

$$\mathcal{L}[af + bg](z) = a\mathcal{L}[f](z) + b\mathcal{L}[g](z).$$

Proof. La demostración se sigue inmediatamente de la linealidad de la integral. Consideremos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[af + bg](z) &= \int_0^{+\infty} e^{-zt}(af(t) + bg(t))dt \\
&= \lim_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-zt}(af(t) + bg(t))dt \\
&= a \lim_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-zt} f(t)dt + b \lim_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-zt} g(t)dt \\
&= a\mathcal{L}[f](z) + b\mathcal{L}[g](z),
\end{aligned}$$

lo que concluye la prueba. ■

A partir de la linealidad de la Transformada de Laplace podemos obtener nuevas Transformadas de funciones elementales, como muestran los siguientes ejemplos.

- **Función seno**. Sea $\omega \in \mathbb{R}$ y consideremos la función

$$f(t) = \sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f](z) &= \frac{1}{2i}\left(\mathcal{L}[e^{it\omega}](z) - \mathcal{L}[e^{-it\omega}](z)\right) \\ &= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i\omega} - \frac{1}{z+i\omega}\right) = \frac{\omega}{z^2+\omega^2}\end{aligned}$$

siempre que $\operatorname{Re} z > 0$.

- **Función coseno**. Sea $\omega \in \mathbb{R}$ y consideremos la función

$$f(t) = \cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}.$$

De forma análoga a la anterior se obtiene que

$$\mathcal{L}[f](z) = \frac{z}{z^2+\omega^2}$$

siempre que $\operatorname{Re} z > 0$.

- **Función seno hiperbólico**. Sea $\omega \in \mathbb{R}$ y consideremos la función

$$f(t) = \sinh(\omega t) = \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f](z) &= \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}[e^{\omega t}](z) - \mathcal{L}[e^{-\omega t}](z)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-\omega} - \frac{1}{z+\omega}\right) = \frac{\omega}{z^2-\omega^2}\end{aligned}$$

si $\operatorname{Re} z > |\omega|$.

- **Función coseno hiperbólico**. Sea $\omega \in \mathbb{R}$ y consideremos la función

$$f(t) = \cosh(\omega t) = \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2}.$$

De forma análoga a la anterior se obtiene que

$$\mathcal{L}[f](z) = \frac{z}{z^2-\omega^2}$$

siempre que $\operatorname{Re} z > |\omega|$.

1.4.2. Transformada de la derivada

Se dice que la función $f \in \mathcal{E}$ es derivable a trozos si es continua, existen las derivadas laterales de f en cada punto de $[0,+\infty)$ y en cada subintervalo $[a,b] \subset [0,+\infty)$ existen a lo sumo una cantidad finita de puntos donde f no es derivable. Si f es derivable a trozos, definimos $f' : [0,+\infty) \to \mathbb{C}$ como $f'(x) = f'_+(x)$ para todo $x \in [0,+\infty)$. Es claro entonces que f' es una función continua a trozos, que coincidirá en casi todos los puntos con la derivada ordinaria. Se tiene entonces el siguiente resultado.

Theorem 3 *Bajo las condiciones anteriores se verifica para todo* $z \in \mathcal{D}_f^*$

$$\mathcal{L}[f'](z) = z\mathcal{L}[f](z) - f(0). \tag{1.5}$$

Proof. Sean $z \in \mathcal{D}_f^*$ y $x > 0$ y consideremos

$$0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x$$

los puntos de discontinuidad de f' en el intervalo $(0,x)$ y fijemos $x_0 = 0$ y $x_n = x$. Entonces, dividiendo el intervalo de integración y utilizando la fórmula de integración por partes

$$\begin{aligned}
\int_0^x e^{-zt} f'(t)dt &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} e^{-zt} f'(t)dt \\
&= \sum_{i=1}^n [e^{-zx_i} f(x_i) - e^{-zx_{i-1}} f(x_{i-1})] + z \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} e^{-zt} f(t)dt \\
&= e^{-zx} f(x) - f(0) + z \int_0^x e^{-zt} f(t)dt.
\end{aligned}$$

Tomando límites cuando $x \to +\infty$, y teniendo en cuenta que $z \in \mathcal{D}_f^*$ y que por tanto existen $A, B \in \mathbb{R}$, $A > 0$, $\operatorname{Re} z > B$, tales que

$$|f(x)e^{-zx}| \leq A e^{(B - \operatorname{Re} z)x} \to 0 \text{ si } x \to +\infty,$$

obtenemos inmediatamente (1.5). ■

Procediendo por inducción a partir de la fórmula (1.5) se prueba una fórmula general para la derivada k–ésima de la función f en el caso de que $f^{k-1)}$ sea derivable a trozos para $k \in \mathbb{N}$. Esta fórmula viene dada para todo $z \in \mathcal{D}_f^*$ por

$$\mathcal{L}[f^{k)}](z) = z^k \mathcal{L}[f](z) - z^{k-1} f(0) - z^{k-2} f'(0) - ... - z f^{k-2)}(0) - f^{k-1)}(0), \tag{1.6}$$

donde las derivadas sucesivas de f en 0 se entienden como derivadas por la derecha.

Las fórmulas 1.5 y 1.6 serán claves para resolver ecuaciones y sistemas diferenciales lineales con coeficientes constantes, como veremos en el apartado de aplicaciones de este tema.

1.4.3. Transformada de la integral

Sea $f \in \mathcal{E}$ y definamos la función

$$g(t) = \int_0^t f(s)ds,$$

que obviamente está bien definida y es continua para todo $t \in [0, +\infty)$. La relación entre las Transformadas de Laplace de ambas funciones viene dada por el siguiente resultado.

Theorem 4 *En las condiciones anteriores, para todo $z \in \mathcal{D}_f^* \cap \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ se verifica*

$$\mathcal{L}[g](z) = \frac{\mathcal{L}[f](z)}{z}. \tag{1.7}$$

Proof. Sea $x > 0$ y consideremos

$$0 = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = x$$

de manera que f no es continua en x_i para $1 \leq i < n$. Obviamente g es derivable en (x_i, x_{i+1}) para $1 \leq i < n$. Entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^x e^{-zt} g(t)dt &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} e^{-zt} g(t)dt \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \left(g(x_i) \frac{e^{-zx_i}}{z} - g(x_{i+1}) \frac{e^{-zx_{i+1}}}{z} \right) + \frac{1}{z} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} e^{-zt} f(t)dt \\
&= -g(x) \frac{e^{-zx}}{z} + \frac{1}{z} \int_0^x e^{-zt} f(t)dt,
\end{aligned}$$

teniendo en cuenta la continuidad de g y $g(0) = 0$. Vamos a comprobar que

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) e^{-zx} = 0.$$

Para ello y dado que $f \in \mathcal{E}$, existirán reales B y $A > 0$ de manera que $|f(t)| \leq Ae^{Bt}$ para todo $t \geq 0$. Sea

$$\begin{aligned}
|g(x)e^{-zx}| &\leq \int_0^x e^{-zx} f(t)dt \leq A \int_0^x e^{Bt - x \operatorname{Re} z} \\
&= Ae^{-x \operatorname{Re} z} \left(\frac{e^{Bx}}{B} - \frac{1}{B} \right) \to 0 \text{ si } x \to +\infty.
\end{aligned}$$

Entonces tomando límites en la expresión anterior obtenemos (**??**). ■

1.4.4. Transformada de la convolución

Sean $f, g \in \mathcal{E}$ y definamos $f(t) = g(t) = 0$ para todo $t < 0$. Se define la convolución de f y g como la función

$$(f * g)(t) = \int_0^{+\infty} f(t-s)g(s)ds = \int_0^t f(t-s)g(s)ds.$$

Puede verse con el cambio de variable $y = t - s$ que $f * g = g * f$. El principal interés de la convolución respecto a la Transformada de Laplace se concreta en el siguiente resultado.

Theorem 5 *En las condiciones anteriores, para todo $z \in \mathcal{D}_f^* \cap \mathcal{D}_g^*$ se verifica la fórmula*

$$\mathcal{L}[f * g](z) = \mathcal{L}[f](z)\mathcal{L}[g](z).$$

Proof. En primer lugar, existen números reales B y $A_i > 0$, $i = 1, 2$, de manera que para todo $t \geq 0$ se verifica

$$|f(t)| \leq A_1 e^{Bt} \text{ y } |g(t)| \leq A_2 e^{Bt}.$$

Entonces para todo $t \geq 0$

$$\begin{aligned} |(f * g)(t)| &= \left| \int_0^t f(t-s)g(s)ds \right| \leq \int_0^t |f(t-s)||g(s)|ds \\ &\leq A_1 A_2 e^{Bt} \int_0^t ds = A_1 A_2 t e^{Bt}, \end{aligned}$$

con lo que se ve fácilmente que $e^{-zt}(f * g)(t)$ es absolutamente integrable para todo $\operatorname{Re} z > B$, con lo que $\mathcal{L}[f * g](z)$ existe para todo z con $\operatorname{Re} z > B$. Por otra parte, como las funciones $e^{-zt} f(t)$ y $e^{-zt} g(t)$ también son absolutamente integrables para todo $\operatorname{Re} z > B$, por el Teorema de Fubini (ver [?, pag. 187]) se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f * g](z) &= \int_0^{+\infty} e^{-zt} \left[\int_0^t f(t-s)g(s)ds \right] dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left[\int_0^t e^{-z(t-s)} f(t-s) e^{-zs} g(s) ds \right] dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left[\int_s^{+\infty} e^{-z(t-s)} f(t-s) e^{-zs} g(s) dt \right] ds \\ &= \int_0^{+\infty} \left[\int_s^{+\infty} e^{-z(t-s)} f(t-s) dt \right] e^{-zs} g(s) ds \\ &= \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} e^{-zu} f(u) du \right] e^{-zs} g(s) ds \\ &= \int_0^{+\infty} \mathcal{L}[f](z) e^{-zs} g(s) ds = \mathcal{L}[f](z)\mathcal{L}[g](z), \end{aligned}$$

con lo que termina la prueba. ■

La demostración de este resultado no la haremos a los alumnos, debido a que pensamos que sus conocimientos le impedirán comprenderla completamente. No obstante la fórmula será bastante útil en las aplicaciones.

1.4.5. Primer Teorema de Traslación

Fijemos un número complejo a y consideremos $f \in \mathcal{E}$. El primer teorema de desplazamiento hace referencia a la transformada de la función $e^{at} f(t)$ y afirma lo siguiente.

Theorem 6 *Bajo las condiciones anteriores*

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)](z) = \mathcal{L}[f](z-a) \tag{1.8}$$

para todo $z \in \mathcal{D}_f + \operatorname{Re} a := \{\omega + \operatorname{Re} a : \omega \in \mathcal{D}_f\}$.

Proof. Sea

$$\int_0^{+\infty} e^{-zt}e^{at}f(t)dt = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-(z-a)t}f(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-(z-a)t}f(t)dt,$$

de donde se deduce inmediatamente (1.8). ■

A partir de este resultado podemos obtener las Transformadas de las funciones siguientes:

- $f(t) = e^{at}\sin(\omega t)$, $\omega \in \mathbb{R}$, cuya Transformada de Laplace para todo número complejo z tal que $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} a$ es
$$\mathcal{L}[f](z) = \frac{\omega}{(z-a)^2+\omega^2}.$$
- $f(t) = e^{at}\cos(\omega t)$, $\omega \in \mathbb{R}$, cuya Transformada de Laplace para todo número complejo z tal que $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} a$ es
$$\mathcal{L}[f](z) = \frac{z-a}{(z-a)^2+\omega^2}.$$
- $f(t) = e^{at}\sinh(\omega t)$, $\omega \in \mathbb{R}$. Si $\operatorname{Re} z > |\omega| + \operatorname{Re} a$, entonces
$$\mathcal{L}[f](z) = \frac{\omega}{(z-a)^2-\omega^2}.$$
- $f(t) = e^{at}\cosh(\omega t)$, $\omega \in \mathbb{R}$. Si $\operatorname{Re} z > |\omega| + \operatorname{Re} a$, entonces
$$\mathcal{L}[f](z) = \frac{z-a}{(z-a)^2-\omega^2}.$$
- $f(t) = e^{at}t^n$ con $n \in \mathbb{N}$. Entonces
$$\mathcal{L}[f](z) = \frac{n!}{(z-a)^{n+1}}$$
siempre que $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} a$.

1.4.6. Segundo Teorema de Traslación

Sea ahora $a > 0$ un número real y supongamos que $f \in \mathcal{E}$ está definida por $f(t) = 0$ para todo $t < 0$. Recordemos que h_a es la función de Heaviside. Entonces tenemos el siguiente resultado.

Theorem 7 *Bajo las anteriores condiciones se verifica para todo $z \in \mathcal{D}_f$*

$$\mathcal{L}[h_a(t)f(t-a)](z) = e^{-az}\mathcal{L}[f](z). \tag{1.9}$$

Proof. Tomamos

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-zt}h_a(t)f(t-a)dt &= \lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-zt}h_a(t)f(t-a)dt \\
&= \lim_{x\to+\infty}\int_a^x e^{-zt}f(t-a)dt \\
&= \lim_{x\to\infty}\int_0^{x-a} e^{-z(s+a)}f(s)ds \\
&= e^{-za}\int_0^{+\infty} e^{-zs}f(s)ds,
\end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable $s = t - a$. De aquí se obtiene inmediatamente (1.9). ■

Este resultado es útil para obtener la Transformada de Laplace de funciones continuas a trozos. Por ejemplo consideremos la función

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t < 1, \\ 0 & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

Esta función puede describirse como

$$f(t) = t[h_0(t) - h_1(t)].$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f](z) &= \mathcal{L}[h_0(t)t](z) - \mathcal{L}[h_1(t)t](z) = \mathcal{L}[t](z) - e^{-z}\mathcal{L}[t+1](z) \\ &= \frac{1}{z^2} - e^{-z}\left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^2} - e^{-z}\frac{z+1}{z^2}, \end{aligned}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} z > 0$.

1.5. Propiedades de la función Transformada de Laplace

En esta sección estudiamos la propiedades de la función Transformada de Laplace considerándola como una función de variable compleja definida en un semiplano $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > x\}$, $x \in \mathbb{R}$. Dividimos la sección en tres subsecciones.

1.5.1. Derivabilidad de la Transformada de Laplace

Consideremos una función $f \in \mathcal{E}$ y su Transformada de Laplace

$$\mathcal{L}[f] : \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \rho\} \to \mathbb{C}.$$

Theorem 8 *Bajo la notación anterior, la función $\mathcal{L}[f]$ es holomorfa para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} z > \rho$ y además se verifica*

$$\frac{d}{dz}\mathcal{L}[f](z) = -\int_0^{+\infty} te^{-zt}f(t)dt.$$

En las condiciones del resultado anterior, obtenemos por inducción la fórmula para la derivada n–ésima de la Transformada de Laplace

$$\frac{d^n}{dz^n}\mathcal{L}[f](z) = (-1)^n\int_0^{+\infty} t^n e^{-zt}f(t)dt.$$

Claramente la demostración de este resultado no es apropiada para hacerla en clase, pues presupone muchos contenidos que no hemos explicado en la misma. Nos centraremos en que el alumno entienda el resultado y sepa aplicarlo. Por ejemplo, calculando las Transformadas de las siguientes funciones.

- $f(t) = t^n \sin(at)$, $n \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{R}$. Se tiene siempre que $\operatorname{Re} z > 0$ la relación

$$\mathcal{L}[f](z) = (-1)^n \frac{d^n}{dz^n} \mathcal{L}[\sin(at)](z) = (-1)^n \frac{d^n}{dz^n} \left(\frac{a}{z^2 + a^2} \right).$$

- $f(t) = t^n \cos(at)$, $n \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{R}$. Se tiene análogamente siempre que $\operatorname{Re} z > 0$

$$\mathcal{L}[f](z) = (-1)^n \frac{d^n}{dz^n} \mathcal{L}[\cos(at)](z) = (-1)^n \frac{d^n}{dz^n} \left(\frac{z}{z^2 + a^2} \right).$$

De forma similar se obtienen fórmulas equivalentes para el coseno y seno hiperbólicos.

1.5.2. Teoremas del valor inicial

Estos resultados hacen alusión a aspectos cualitativos de la Transformada de Laplace de funciones de la clase $\mathcal{E}$.

Theorem 9 *Sea $f \in \mathcal{E}$. Entonces*

$$\lim_{\operatorname{Re} z \to +\infty} \mathcal{L}[f](z) = 0. \tag{1.10}$$

Proof. Sea $z \in \mathcal{D}_f^*$. Existen números reales $A > 0$ y B de manera que $|f(t)| \leq Ae^{Bt}$ para todo $t \geq 0$. Entonces

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}[f](z)| &\leq \lim_{x \to +\infty} \int_0^x |e^{-tz} f(t)| dt \leq A \lim_{x \to +\infty} \int_0^x e^{t(B - \operatorname{Re} z)} dt \\ &= \lim_{x \to +\infty} \frac{A(e^{x(B - \operatorname{Re} z} - 1)}{B - \operatorname{Re} z} = \frac{A}{\operatorname{Re} z - B}, \end{aligned}$$

de donde claramente obtenemos (1.10) al hacer $\operatorname{Re} z \to +\infty$. ■

Continuamos esta sección con otro resultado que estudia cuestiones cualitativas de la Transformada de Laplace.

Theorem 10 *Asumamos que $f \in \mathcal{E}$ es derivable a trozos y que $f' \in \mathcal{E}$. Entonces*

$$\lim_{\operatorname{Re} z \to +\infty} z\mathcal{L}[f](z) = f(0). \tag{1.11}$$

Proof. Sea $z \in \mathcal{D}_f^*$. Por el Teorema 3 tenemos que

$$z\mathcal{L}[f](z) = f(0) + \mathcal{L}[f'](z). \tag{1.12}$$

Aplicando el Teorema 9 a (1.12) se tiene que $\lim_{\operatorname{Re} z \to +\infty} \mathcal{L}[f'](z) = 0$, de donde se deduce inmediatamente (1.11). ■

Los resultados anteriores muestran que no todas las funciones de variable compleja pueden ser Transformadas de Laplace de funciones de $\mathcal{E}$. Por ejemplo, la función $1/\sqrt{z}$ no puede serlo al tenerse que

$$\lim_{\operatorname{Re} z \to +\infty} \frac{z}{\sqrt{z}} = \infty.$$

1.5.3. Teorema del valor final

Al igual que los resultados de la sección anterior el Teorema del valor final aporta información cualitativa de la Transformada de Laplace en conexión directa con la función de la cual es transformada.

Theorem 11 *Sea $f \in \mathcal{E}$ una función derivable a trozos tal que $f' \in \mathcal{E}$. Supongamos que $0 \in \mathcal{D}_f^*$ y que existe y es finito* $\lim_{t\to+\infty} f(t)$. *Entonces*

$$\lim_{z\to 0} z\mathcal{L}[f](z) = \lim_{t\to+\infty} f(t).$$

Proof. Por el Teorema 3,

$$z\mathcal{L}[f](z) - f(0) = \mathcal{L}[f'](z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} f'(t)dt.$$

Por el Teorema 8, $\mathcal{L}[f'](z)$ es derivable y por lo tanto continua. Entonces

$$\lim_{z\to 0} \mathcal{L}[f'](z) = \mathcal{L}[f'](0) = \int_0^{+\infty} f'(t)dt = \lim_{t\to+\infty} f(t) - f(0),$$

lo cual concluye la demostración. ■

1.6. Transformada de Laplace inversa

1.6.1. Inyectividad de la Transformada de Laplace

Al intervenir en la definición de Transformada de Laplace la integración, está claro que puede haber infinitas funciones en $\mathcal{E}$ teniendo la misma Transformada, por lo que la ésta no será inyectiva. Sin embargo este problema puede paliarse en parte para así poder hablar de la Transformada inversa de una función holomorfa definida en un semiplano complejo. Como veremos en las aplicaciones del tema, este punto será de vital importancia.

Consideremos $f : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ una función localmente integrable. Diremos que f es *nula* o *nula casi por todas partes* si para todo $x \in (0, +\infty)$ se verifica que

$$\int_0^x |f(t)|dt = 0.$$

Dos funciones $f, g : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ localmente integrables se dirán *iguales casi por todas partes* si $f - g$ es nula. Se tiene entonces el siguiente resultado.

Proposition 12 *Sean $f, g \in \mathcal{E}$ iguales casi por todas partes. Entonces $\mathcal{L}[f](z) = \mathcal{L}[g](z)$ para todo $z \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$.*

Proof. Sea $x > 0$ y $z \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$. Por el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral existe $\rho \in (0, x)$ tal que

$$\int_0^x |e^{-zt} f(t) - e^{-zt} g(t)| dt = e^{-\rho \operatorname{Re} z} \int_0^x |f(t) - g(t)| dt = 0.$$

Así

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}[f](z) - \mathcal{L}[g](z)| &= \lim_{x \to +\infty} \left| \int_0^x e^{-zt} f(t) dt - \int_0^x e^{-zt} g(t) dt \right| \\ &\leq \lim_{x \to +\infty} e^{-\rho \operatorname{Re} z} \int_0^x |f(t) - g(t)| dt = 0, \end{aligned}$$

lo que termina la demostración. ■

El siguiente resultado establece una especie de recíproco para el resultado anterior.

Theorem 13 ***(Lerch)*** *Sean $f, g \in \mathcal{E}$ tales que $\mathcal{L}[f](z) = \mathcal{L}[g](z)$ para todo $z \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$. Entonces f y g son iguales salvo a lo mejor en los puntos de discontinuidad de ambas, con lo que además $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g$.*

La demostración de este resultado no la haremos en clase y no lo hemos incluido en la lección ya que no puede obtenerse de forma autocontenida con las técnicas que tenemos a nuestra disposición.

1.6.2. Transformada de Laplace inversa

Consideremos la función

$$\mathcal{L} : \mathcal{E} \to \mathcal{L}(\mathcal{E}).$$

El Teorema 13 permite definir clases de equivalencia en $\mathcal{E}$ del siguiente modo. Dadas $f, g \in \mathcal{E}$ se dirá que ambas están relacionadas, $f \sim g$ si y sólo si son iguales salvo a lo sumo en los puntos de discontinuidad de ambas. Podemos definir entonces la Transformada de Laplace inversa

$$\mathcal{L}^{-1} : \mathcal{L}(\mathcal{E}) \to \mathcal{E}/\sim$$

para $F \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ como $\mathcal{L}^{-1}[F] = [f]$ donde $[f]$ denota la clase de $f \in \mathcal{E}$ de manera que $\mathcal{L}[f] = F$. En general con nuestros alumnos tenderemos a identificar clases con funciones que normalmente podrán ser calculadas. Así diremos que dada $F \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ su Transformada inversa es una función $\mathcal{L}^{-1}[F](t) = f(t)$ de forma que $\mathcal{L}[f] = F$, aunque está perfectamente claro que tal f no es única.

En este contexto, destacamos las siguiente propiedades de Transformada inversa que serán especialmente interesantes a la hora de las aplicaciones.

- **Linealidad**. Dadas $F, G \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ se verifica

$$\mathcal{L}^{-1}[\alpha F + \beta G](t) = \alpha \mathcal{L}^{-1}[F](t) + \beta \mathcal{L}^{-1}[G](t).$$

- **Traslación**. Dada $F \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ y $a > 0$ se cumple la relación

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-az} F(z)](t) = h_a(t) \mathcal{L}^{-1}[F](t - a).$$

- **Convolución**. Dadas $F, G \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ se cumple

$$\mathcal{L}^{-1}[FG](t) = (\mathcal{L}^{-1}[F] * \mathcal{L}^{-1}[G])(t).$$

Estas propiedades son particularmente interesantes a la hora de obtener Transformadas inversas de Laplace una vez conocidas las Transformadas directas.

1.6.3. Fórmula de inversión compleja

Aparte de las técnicas estudiadas en el apartado anterior para hallar Transformadas inversas, estudiaremos la siguiente fórmula de inversión compleja.

Theorem 14 *Supongamos que $F(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, ..., z_n\}$, y que existe $\sigma \in \mathbb{R}$ tal que F es holomorfa en $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \sigma\}$. Supongamos además que existen constantes positivas M, R y β tales que*

$$|F(z)| \leq \frac{M}{|z|^\beta} \text{ si } |z| \geq R. \tag{1.13}$$

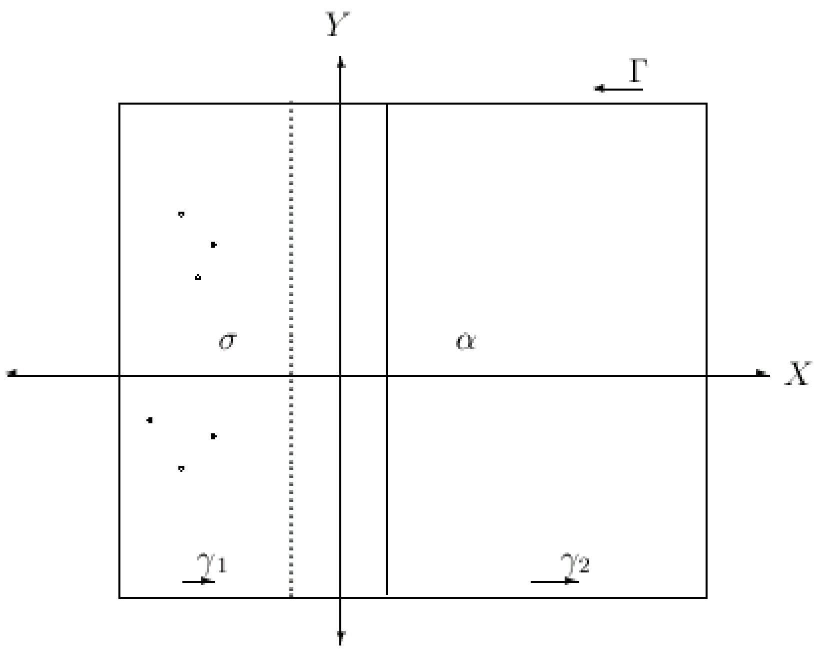
Para $t \geq 0$ sea

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}(e^{tz} F(z), z_i).$$

Entonces

$$\mathcal{L}[f](z) = F(z) \text{ si } \operatorname{Re} z > \sigma.$$

Proof. Sea $\alpha > \sigma$ y consideremos el rectángulo Γ de la figura, suficientemente grande para que las singularidades de F estén contenidas en su interior y además todo $z \in \Gamma$ cumpla la condición $|z| > R$. Separamos Γ en la suma de dos caminos cerrados γ_1 y γ_2 divididos por la recta $\operatorname{Re} z = \alpha$.



Como las singularidades de F están contenidas en el interior de γ_1, por definición de f tenemos que

$$\int_{\gamma_1} e^{zt}F(z)dz = 2\pi i f(t).$$

Entonces

$$\begin{aligned} 2\pi i\mathcal{L}[f](z) &= \lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-zt}\left[\int_{\gamma_1} e^{\omega t}F(\omega)d\omega\right]dt \\ &= \lim_{x\to+\infty}\int_{\gamma_1}\left[\int_0^x e^{(\omega-z)t}F(\omega)dt\right]d\omega, \end{aligned}$$

aplicando el Teorema de Fubini. Por integración directa

$$2\pi i\mathcal{L}[f](z) = \lim_{x\to+\infty}\int_{\gamma_1}\left(e^{(\omega-z)x}-1\right)\frac{F(\omega)}{\omega-z}d\omega.$$

Para z fijo en el semiplano $\operatorname{Re} z > \alpha$, el término $e^{(\omega-z)x}$ converge uniformemente a 0 si $x\to+\infty$ y el integrando converge a $-F(\omega)/(\omega-z)$ en γ_1. Así

$$\begin{aligned} 2\pi i\mathcal{L}[f](z) &= -\int_{\gamma_1}\frac{F(\omega)}{\omega-z}d\omega = \int_{\gamma_2}\frac{F(\omega)}{\omega-z}d\omega - \int_\Gamma\frac{F(\omega)}{\omega-z}d\omega \\ &= 2\pi i F(z) - \int_\Gamma\frac{F(\omega)}{\omega-z}d\omega. \end{aligned}$$

Por otra parte, sea $\tau(t)=\rho e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$ una circunferencia de radio $\rho > R$ y conteniendo a Γ. Entonces

$$\int_\Gamma\frac{F(\omega)}{\omega-z}d\omega = \int_\tau\frac{F(\omega)}{\omega-z}d\omega,$$

de donde

$$\left|\int_\tau\frac{F(\omega)}{\omega-z}d\omega\right| \le \frac{M}{|\rho|^\beta(\rho-R)}2\pi\rho \to 0 \text{ si } \rho\to+\infty.$$

Así

$$\int_\Gamma\frac{F(\omega)}{\omega-z}d\omega = 0$$

y como α era arbitrario, la fórmula $\mathcal{L}[f](z)=F(z)$ es válida para todo $\operatorname{Re} z > \sigma$. ■

Remarquemos aquí que la condición (1.13) del resultado anterior se cumple para funciones de la forma $F(z)=P(z)/Q(z)$ donde P y Q son polinomios tales que $\deg Q \geq 1+\deg P$, donde $\deg P$ denota el grado de P. Así por ejemplo, la Transformada inversa de la función

$$F(z) = \frac{z}{z^2+1}$$

puede calcularse como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[F](t) &= f(t) \\ &= \operatorname{Res}(e^{tz}F(z), i) + \operatorname{Res}(e^{tz}F(z), -i) \\ &= e^{it}\frac{i}{2i} + e^{-it}\frac{i}{-2i} = \cos t. \end{aligned}$$

1.7. Aplicaciones: una primera aproximación

La Transformada de Laplace es una herramienta útil para resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Como comentamos en la introducción del tema, estas ecuaciones aparecen de forma natural en la teoría de circuitos eléctricos. Para ilustrar el método, consideremos el siguiente ejemplo: la ecuación

$$y'' + y = \cos t \tag{1.14}$$

junto con las condiciones iniciales

$$y(0) = 0;\ y'(0) = 1. \tag{1.15}$$

Básicamente se trata de aplicar la Transformada de Laplace y sus propiedades a (1.14) de manera que teniendo en cuenta (1.15), nuestro problema se convierte en el problema algebraico

$$z^2\mathcal{L}[y](z) - zy(0) - y'(0) + \mathcal{L}[y](z) = \frac{z}{z^2+1},$$

de donde

$$\mathcal{L}[y](z) = \frac{z^2+z+1}{(z^2+1)^2}.$$

Una vez obtenida $\mathcal{L}[y]$, hemos de usar la Transformada inversa para volver atrás y recuperar la solución del problema y. En este caso, $\mathcal{L}[y]$ satisface las condiciones del Teorema 14, por lo que

$$\begin{aligned} y(t) &= \operatorname{Res}\left(e^{tz}\frac{z^2+z+1}{(z^2+1)^2}, i\right) + \operatorname{Res}\left(e^{tz}\frac{z^2+z+1}{(z^2+1)^2}, -i\right) \\ &= (1+t/2)\sin t, \end{aligned}$$

una vez realizados los cálculos.

1.8. Uso de la convolución

Otra forma de abordar el problema anterior, sin necesidad de tener que calcular la Transformada de Laplace de la función coseno es la siguiente. Consideremos los cálculos realizados anteriormente, pero sin obtener $\mathcal{L}[f](z)$ donde $f(t) = \cos t$. Nos quedará entonces la ecuación algebraica

$$z^2\mathcal{L}[y](z) - 1 + \mathcal{L}[y](z) = \mathcal{L}[f](z),$$

de donde

$$\mathcal{L}[y](z) = \frac{1}{z^2+1} + \frac{1}{z^2+1}\mathcal{L}[f](z).$$

Entonces

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[1/(z^2+1)](t) + \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[f](z)/(z^2+1)](t) \\ &= \sin t + (\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[f](z)] * \mathcal{L}^{-1}[1/(z^2+1)])(t) \\ &= \sin t + \int_0^t \sin(t-s)\cos s ds \\ &= \sin t + \left[\frac{1}{4}(\cos(2s-t) + 2s\sin t\right]_0^t \\ &= \sin t + \frac{t}{2}\sin t = (1+t/2)\sin t, \end{aligned}$$

que era la solución obtenida anteriormente.

Así, el uso del producto de convolución presenta una vía alternativa para la resolución de estos problemas, aunque a veces el cálculo de las integrales que aparecen en el producto de convolución pueden ser bastante complicado.

1.9. Ejercicios

1. Calcular la transformada de Laplace de las siguientes funciones

$$\text{(a) } f(t) = \sin(3t) \quad \text{(b) } f(t) = e^{5t} \quad \text{(c) } f(t) = e^{5t}\cos 3t \quad \text{(d) } f(t) = te^t$$

$$\text{(e) } f(t) = t^3 - t \quad \text{(f) } f(t) = \sinh t \quad \text{(g) } f(t) = \cos t \sin t \quad \text{(h) } f(t) = e^t \cos t \sin(2t)$$

2. Una función $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ se dice que es *periódica con periodo* $a > 0$ o a*-periódica* si para cada $t \geq 0$ se tiene que $f(t) = f(t + a)$. Comprobar que en caso de existir la transformada de Laplace de f, se verifica la igualdad

$$\mathcal{L}(f)(z) = \frac{1}{1 - e^{-az}} \int_0^a e^{-tz} f(t)\, dt$$

3. Usar el resultado de la actividad anterior para calcular la transformada de Laplace de la función peródica de periodo 2 definida en $[0, 2]$ por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1], \\ 2 - x & \text{si } x \in [1, 2]. \end{cases}$$

4. Dada la función,

$$f(t) = \int_0^t e^{-s} \sin s\, ds, \quad t \geq 0$$

calcular su transformada de Laplace. Calcular asimismo la transformada de Laplace de $g(t) = tf(t)$.

5. Dada la función $f(t)$, definimos la función $g(t) = f(at)$, que puede verse como un cambio de escala en t. Comprobar que

$$\mathcal{L}[g](z) = \mathcal{L}[f(at)](z) = \frac{1}{a}\mathcal{L}[g](z/a).$$

Utilizar dicha fórmula para calcular la transformada de la función $\sin(at)$ a partir de

$$\mathcal{L}[\sin t](z) = \frac{1}{1 + z^2}.$$

6. Calcular la transformada de Laplace de la función,

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 1, & \text{si } 1 < t \leq 2 \\ 0, & \text{si } t > 2 \end{cases}$$

7. Calcular la transformada de Laplace de las siguientes funciones.

$$\text{(a) } f(t) = |\sin t| \quad \text{(b) } g(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ t, & \text{si } t > 1 \end{cases} \quad \text{(c) } h(t) = \begin{cases} t^2 - 1, & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ 2, & \text{si } t > 2 \end{cases}$$

8. Calcular la transformada de Laplace de la función escalonada

$$f(t) = \begin{cases} \pi, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & 1 < t \leq 2 \end{cases}$$

extendida a todo $[0, +\infty[$ como 2-periódica.

9. ¿Existirá la transformada inversa de Laplace de las siguientes funciones de variable compleja? Razonar las respuestas.

$$\text{(a) } F(z) = \frac{z}{\sin z} \quad \text{(b) } F(z) = \frac{e^{-z}}{z} \quad \text{(c) } F(z) = \frac{z}{1+z^2} \quad \text{(d) } F(z) = \frac{e^{-\pi z}}{1+\cos(z^2)}$$

10. Calcular la transformada inversa de Laplace de las funciones siguientes

$$\text{(a) } F(z) = \frac{z^2}{1+z^3} \quad \text{(b) } F(z) = \frac{1}{(z-1)(z^2-2)} \quad \text{(c) } F(z) = \frac{z+7}{z^2+2z+5}$$

$$(d)\ F(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)(z^2+2z+10)}$$

11. Calcular la transformada inversa de Laplace de las siguientes funciones:

$$\text{(a) } F(z) = \frac{ze^{-\pi z}}{z^2+2z+5} \quad \text{(b) } F(z) = \frac{(z-1)e^{-z}}{z^3+2} \quad \text{(c) } F(z) = \frac{z+1}{e^z z^2(z^2+9)} \quad \text{(d) } F(z) = \frac{z+1}{z^4}$$

12. Calcular las transformadas inversas de Laplace de las funciones:

$$\text{(a) } F(z) = \frac{e^{-az}}{1+z^2},\ (a > 0) \quad \text{(b) } F(z) = \frac{z}{(z-1)(z+2)^2} \quad \text{(c) } F(z) = \frac{e^{-z}}{z} + \frac{z-1}{z^2+2}$$

$$(d)\ F(z) = \frac{z^2}{(z-2)(z^3-1)}$$

13. Utilizar la transformada de Laplace para resolver los siguientes problemas de Cauchy asociados a ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes:

$$\left.\begin{array}{l} y'''(t) + 5y''(t) + 17y'(t) + 13y(t) = 1 \\ y(0) = y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} y'(t) + 3y(t) = e^{-2t} \\ y(0) = 2 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 5h_4(t) \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} y''(t) + y(t) = t \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -2 \end{array}\right\}$$

14. Resolver los siguientes problemas de valores iniciales:

$$\left.\begin{array}{l} y''(t) + y'(t) = \phi(t), \text{ con } \phi(t) = \left\{\begin{array}{ll} t, & t < 1 \\ 0, & t \geq 1 \end{array}\right. \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 2 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} y''(t) + y(t) = \sin t, \\ y(0) = y'(0) = -1 \end{array}\right\}$$

15. Consideremos un circuito LCR como el de la figura

de forma que $L = 2$ henrios, $R = 16$ ohmios, $C = 0{,}02$ faradios y la fuerza electromotriz va oscilando con el tiempo siguiendo la relación $V(t) = 100\sin(3t)$.

a) Utilizar las leyes de Kirchhoff para obtener la ecuación diferencial que verifica la función que describe la carga en función del tiempo.

b) Determinar la carga en función del tiempo si en el momento de de conectar el circuito, $t = 0$, la carga del condensador es igual a cero.

c) Determinar la carga del condensador en función del tiempo si inicialmente es de 1.5 culombios.

16. En el caso de un circuito LCR en el que no se tiene ninguna resistencia, la ecuación diferencial que describe la carga del condensador en función del tiempo es de la forma,

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}(t) + \frac{Q(t)}{C} = E(t)$$

y se denomina *oscilador armónico*. Resolver la ecuación anterior en los siguientes casos:

a) La fuerza electromotriz E es constante y la carga e intensidad de corriente en el momento inicial son ambas nulas.

b) La fuerza electromotriz es de la forma $\sin(\omega t + \sigma)$, con $\omega, \sigma \in \mathbb{R}$, mientras que $Q(0) = 1$ al conectar el circuito.

17. Usar la transformada de Laplace para resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineales:

$$\left.\begin{array}{l} 2y_1''(t) - y_2''(t) - y_1'(t) - y_2'(t) + 9y_1(t) - 3y_2(t) = 0 \\ 2y_1''(t) - y_2''(t) + y_1'(t) + y_2'(t) + 7y_1(t) - 5y_2(t) = 0 \end{array}\right\}$$

con las condiciones iniciales:

$$y_1(0) = y_1'(0) = 1, \qquad y_2(0) = y_2'(0) = 0$$

18. Encuentra la solución del siguiente problema de Cauchy,

$$\left.\begin{array}{l} y''(t) + y(t) = \operatorname{sen}(\omega\, t) \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{array}\right\}$$

con $\omega > 1$.

19. Encuentra la solución del oscilador armónico dado por la ecuación diferencial:

$$y''(t) + \beta\, y(t) = \sin(\omega\, t)\,, \qquad (\beta \in \mathbb{R},\ \omega > 0)$$

que verifica las condiciones iniciales:

$$y(0) = -1/2, \qquad y'(0) = 0 \quad \text{(06-09-99)}$$

20. Resuelve el siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{array}{l} y''(t) + \beta\, y(t) = \cos(\omega t) \\ y(0) = -1, \quad y'(0) = 0 \end{array}$$

distinguiendo los casos en que $0 < \beta$ y $0 > \beta$.

21. Obtener la solución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales,

$$\left.\begin{array}{l} 3y_1'(t) + y_2'(t) - 2y_1(t) = 3\sin t + 5\cos t \\ 2y_1'(t) + y_2'(t) + y_2(t) = \sin t + \cos t \end{array}\right\}$$

para las condiciones iniciales, $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = -1$.

Capítulo 2

Transformada de Fourier

Sumario. Definición y propiedades básicas. Transformada de Fourier inversa. Relación con la transformada de Laplace. Aplicación a las ecuaciones diferenciales y en derivadas parciales.

2.1. Definición y primeros ejemplos

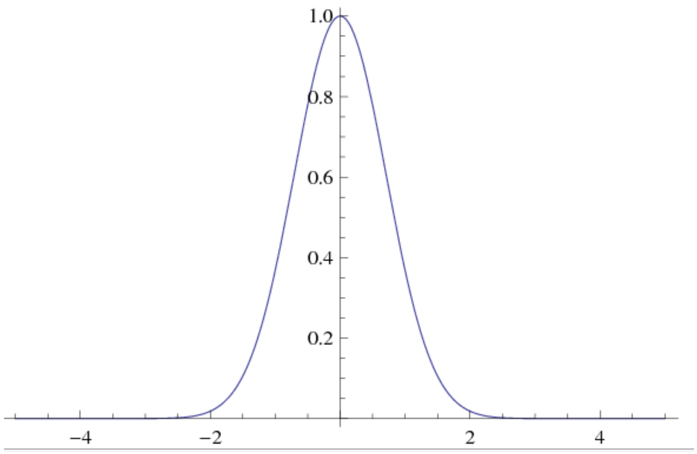
Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, se define la transformada de Fourier de f como

$$\mathcal{F}[f](z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-itz}dt$$

en todo z donde la expresión anterior tenga sentido, es decir la integral impropia anterior sea convergente. Esta convergencia es más difícil de verificar que en el caso de la transformada de Laplace. Supongamos por ejemplo que t y z son reales, por o que $e^{-itz} = \cos(tz) - i\sin(tz)$, que como sabemos tiene módulo 1. Si $f(t)$ es también real, para garantizar la convergencia absoluta de la integral anterior debe de satisfacerse que

$$\lim_{t\to\pm\infty} |f(t)e^{-itz}| = \lim_{t\to\pm\infty} |f(t)| = 0,$$

por lo que las funciones reales que tendrán transformada de Fourier tienen que tener una gráfica como la siguiente



o bien ser nulas fuera de un intervalo compacto $[a, b]$. Veamos algunos ejemplos.

Consideramos la función $f(t) = h_{-a}(t) - h_a(t)$, donde $h_a(t)$ es la función de Heaviside en $a \in \mathbb{R}$. Como vemos f es no nula con valor uno en el intervalo $[-a, a)$. Su transformada de Fourier se calcula como

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f](z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-itz}dt = \int_{-a}^{a} e^{-itz}dt \\ &= \left[\frac{e^{-itz}}{-iz}\right]_{-a}^{a} = \frac{-1}{iz}\left(e^{-iaz} - e^{iaz}\right) = \frac{2}{z}\sin(az). \end{aligned}$$

Tomemos ahora la función $f(t) = e^{-|t|}$. Su transformada de Fourier vendrá dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f](z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-itz}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{t}e^{-itz}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-t}e^{-itz}dt \\ &= \int_{-\infty}^{0} e^{(1-iz)t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(1+iz)t}dt \\ &= \left[\frac{e^{(1-iz)t}}{1-iz}\right]_{-\infty}^{0} + \left[-\frac{e^{-(1+iz)t}}{1+iz}\right]_{0}^{\infty} \\ &= \frac{1}{1-iz} + \frac{1}{1+iz} = \frac{2}{z^2+1}. \end{aligned}$$

2.2. Propiedades básicas

Al igual que la transformada de Laplace, la transformada de Fourier tiene unas propiedades básicas que permiten operar con ella con más facilidad. Las enumeramos a continuación suponiendo siempre buenas condiciones de convergencia de las funciones implicadas.

2.2.1. Linealidad

Dadas dos funciones f y g y dos números α, β se verifica que

$$\mathcal{F}[\alpha f + \beta g](z) = \alpha \mathcal{F}[f](z) + \beta \mathcal{F}[g](z).$$

La prueba de esta propiedad viene directamente de la linealidad de la integral de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\alpha f + \beta g](z) &= \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha f + \beta g)(t) e^{-itz} dt \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-itz} dt + \beta \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-itz} dt \\ &= \alpha \mathcal{F}[f](z) + \beta \mathcal{F}[g](z). \end{aligned}$$

Por ejemplo, si $f(t) = h_{-a}(t) - h_a(t) + e^{-|t|}$, su transformada de Fourier vendrá dada por

$$\mathcal{F}[f](z) = \mathcal{F}[f_1](z) + \mathcal{F}[f_2](z) = \frac{2}{z} \sin(az) + \frac{2}{z^2+1},$$

siendo $f_1(t) = h_{-a}(t) - h_a(t)$ y $f_2(t) = e^{-|t|}$.

La linealidad no puede aplicarse al calculo de f_1 del siguiente modo

$$\mathcal{F}[f_1](z) = \mathcal{F}[h_{-a}](z) - \mathcal{F}[h_a](z)$$

ya que las funciones h_{-a} y h_a no tienen transformada de Fourier.

2.2.2. Transformada de la derivada

Dada una función derivable a trozos, se tiene que

$$\mathcal{F}[f'](z) = iz\mathcal{F}[f](z).$$

La demostración se hace con la fórmula de integración por partes del siguiente modo

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f'](z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-itz} dt = \left\{ \begin{array}{cc} u = e^{-izt} & du = -ize^{-iz} dt \\ dv = f'(t) & v = f(t) \end{array} \right\} \\ &= \left[f(t) e^{-izt} \right]_{-\infty}^{\infty} + iz \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-itz} dt = iz\mathcal{F}[f](z), \end{aligned}$$

ya que

$$\lim_{t \to \pm\infty} |f(t) e^{-izt}| = 0$$

para garantizar la convergencia.

En general, puede comprobarse que la derivada n–ésima se calcula como

$$\mathcal{F}[f^{n)}](z) = (iz)^n \mathcal{F}[f](z).$$

Esta fórmula, junto con la linealidad, tiene, al igual que ocurría con la transformada de Laplace, utilidad potencial para la resolución de ecuaciones diferenciales.

2.2.3. Cambios de escala

Sea f una función y a un número real. Podemos calcular la transformada de Fourier de la función $g(t) = f(at)$, que puede verse como un cambio de escala en t, con la fórmula

$$\mathcal{F}[g](z) = \mathcal{F}[f(at)](z) = \frac{1}{a}\mathcal{F}[g](z/a).$$

Esta fórmula es consecuencia del cambio de variable en la integral ya que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[g](z) &= \mathcal{F}[f(at)](z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-izt}dt \\
&= \left\{ \begin{array}{c} at = s \\ adt = ds \end{array} \right\} = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-izs/a}ds = \frac{1}{a}\mathcal{F}[f](z/a)
\end{aligned}$$

A modo de ejemplo, si suponemos que $f(t) = e^{-b|t|}$ con $b > 0$, podemos calcular

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f](z) &= \mathcal{F}[e^{-b|t|}](z) = \mathcal{F}[e^{-|bt|}](z) \\
&= \frac{1}{b}\mathcal{F}[e^{-|t|}](z/b) = \frac{1}{b}\frac{2}{z^2/b^2+1} = \frac{2b}{z^2+b^2}.
\end{aligned}$$

2.2.4. Derivada de la transformada

La fórmula para calcular la derivada de la trasnforma de Fourier de una función es

$$i\frac{d}{dz}\mathcal{F}[f](z) = \mathcal{F}[tf(t)](z).$$

Esta relación es consecuencia de un cambio de orden en el cálculo de límites ya que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\mathcal{F}[f](z) &= \frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-itz}dt = (*)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{dz}f(t)e^{-itz}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(-it)e^{-itz}dt = -i\int_{-\infty}^{\infty} tf(t)e^{-itz}dt = -i\mathcal{F}[tf(t)](z).
\end{aligned}$$

Vamos a aplicar esta fórmula al cálculo de la transformada de Fourier de la función $f(t) = e^{-t^2/2}$. En primer lugar, la función $f(t)$ verifica el problema de condiciones iniciales

$$\left\{ \begin{array}{c} f'(t) = -tf(t), \\ f(0) = 1. \end{array} \right.$$

Por otra parte, transformando la ecuación anterior tenemos que

$$iz\mathcal{F}[f](z) = -\mathcal{F}[tf(t)](z) = -i\frac{d}{dz}\mathcal{F}[f](z),$$

por lo que $\mathcal{F}[f](z)$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dz}\mathcal{F}[f](z) = -z\mathcal{F}[f](z),$$

que tiene por solución

$$\mathcal{F}[f](z) = ce^{-z^2/2}.$$

Por otra parte, como

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

tenemos que mediante un cambio de variable

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}$$

y por tanto

$$\mathcal{F}[f](0) = c = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi},$$

por lo que

$$\mathcal{F}[f](z) = \sqrt{2\pi} e^{-z^2/2},$$

es decir, la transformada de Fourier de $e^{-t^2/2}$ es ella misma salvo el factor multiplicativo $\sqrt{2\pi}$.

2.2.5. Convolución

Dadas dos funciones f y g con transformadas de Fourier $\mathcal{F}[f]$ y $\mathcal{F}[g]$, no se verifica que $\mathcal{F}[f \cdot g] = \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g]$. Vamos a buscar qué función h verificaría que $\mathcal{F}[h] = \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g]$, es decir, cómo puede definirse h a partir de las funciones iniciales f y g. Para ello calculamos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-izt} dt \int_{-\infty}^{\infty} g(s) e^{-izs} ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(s) e^{-iz(t+s)} dt ds \\
&= \left\{ \begin{array}{c} t + s = x \\ dt = dx \end{array} \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-s) g(s) e^{-izx} dx ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x-s) g(s) ds \right] e^{-izx} dx,
\end{aligned}$$

por lo que hemos derivado formalmente[1] que

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s) g(s) ds,$$

que se conoce con el nombre de producto de convolución, denotado por

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s) g(s) ds.$$

Como veremos, esta fórmula tiene aplicaciones en la resolución de diferentes ecuaciones diferenciales.

[1] Auí hemos hecho un cambio en la integración, es decir, una permuta de límites de la que no hemos probado su validez.

2.3. Transformada de Fourier inversa

Dada una función f sabemos cómo obtener su transformada de Fourier de dicha función $\mathcal{F}[f]$. Ahora bien, como en el caso de la transformada de Laplace a veces es necesario recorrer el camino inverso, es decir, dada una función $F(z)$, ¿es posible encontrar una función real f tal que $\mathcal{F}[f] = F$. En términos de función inversa sería la relación $f = \mathcal{F}^{-1}[F]$, donde $\mathcal{F}^{-1}[F]$ denota la transformada inversa de Fourier.

Al tratarse de una transformda integral, no existirá una única función verificando ser la transformada inversa de $F(z)$. Sin embargo, en general la fórmula de inversión establece que para una función suficientemente buena la relación

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](z)e^{izt}dz = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-izt}dte^{izt}dz \tag{2.1}$$

se verifica por lo que la transformada inversa de Fourier podría definirse como

$$\mathcal{F}^{-1}[F](t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(z)e^{izt}dz.$$

En particular, las condiciones de Dirichlet establecen que si se verifica que

- $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty$,
- f tiene un múero finito de extremos relativos y un número finito de discontinuidades, todas ellas evitables, en cada subintervalo compacto de la recta real,

entonces la fórmula (2.1) se verifica en todos los puntos de continuidad de f. En los puntos de discontinuidad x la integral valdría el promedio de $f(x+)$ y $f(x-)$.

Así, por ejemplo, dada la función

$$F(z) = \frac{2b}{z^2 + b^2}$$

se verifica que

$$\mathcal{F}^{-1}[F](t) = e^{b|t|},\ b > 0.$$

Por tratarse de una fórmula integral, dicha función hereda las propiedades de la integración, en particular la linealidad

$$\mathcal{F}^{-1}[\alpha F + \beta G](t) = \alpha\mathcal{F}^{-1}[F](t) + \beta\mathcal{F}^{-1}[G](t).$$

2.4. Relación con la transformada de Laplace

Como sabemos, la transformada de Laplace de una función $f : (0, \infty) \to \mathbb{C}$ se define como

$$\mathcal{L}[f](z) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-zt}dt,$$

que tendrá validez en un dominio de definición dado por $\operatorname{Re} z > \alpha$ para algún a real. Si $a < 0$, el eje imaginario estará contenido en el dominio de definición de la transformada de Laplace de f. En particular, la integral

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt,\ \omega \in \mathbb{R},$$

tendrá sentido al ser finita.

Si consideramos $f(x) = 0$ definida como para todo $x \leq 0$, podemos calcular su transformada de Fourier como

$$\mathcal{F}[f](z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-izt}dt = \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-izt}dt,$$

integral que tendrá sentido para todo $z \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, se tendría la igualdad

$$\mathcal{L}[f](i\omega) = \mathcal{F}[f](\omega), \ \omega \in \mathbb{R}.$$

Consideremos por ejemplo la función $f(t) = e^{-t}$, que como sabemos tiene transformada de Laplace

$$\mathcal{L}[f](z) = \frac{1}{z+1}$$

para todo z tal que $\operatorname{Re} z > -1$. Si estendemos f como nula en valores negativos, es decir, definimos $g(t) = f(t)h_0(t)$ siendo $h_0(t)$ la función de Heaviside, tendremos para todo número real ω que

$$\mathcal{F}[g](\omega) = \mathcal{L}[f](i\omega) = \frac{1}{i\omega + 1}.$$

2.4.1. Aplicación a los sistemas estables

Si tenemos un sistema asintóticamente estable con función de transferencia $T(z)$, sabemos que su respuesta a una señal sinusuidal de la forma

$$A \sin(\omega t + \phi)$$

viene dada por la expresión

$$x(t) = A|T(i\omega)| \sin(\omega t + \phi + \arg T(i\omega)),$$

pero $T(i\omega)$ es la transformada de Fourier. Esta función $T(i\omega)$ se conoce como función de transferencia de frecuencias del sistema. En particular, para sistemas estables estos pueden verse como

$$\mathcal{F}[y](\omega) = T(i\omega)\mathcal{F}[f](\omega)$$

que relaciona la transformada de Fourier de la salida $\mathcal{F}[y](\omega)$ con la de la entrada $\mathcal{F}[f](\omega)$.

2.5. Aplicación a las ecuaciones en derivadas parciales

Consideremos la ecuación del calor en una barra infinita

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \ x \in \mathbb{R}, \ t > 0, \\ u(0,x) = f(x), \ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Como vemos no hay condiciones de frontera y por tanto sólo existen condiciones iniciales. Para resolver dicho problema tomamos la transformada de Fourier de la función $u(t,x)$, para cada valor fijo del tiempo t, es decir

$$\mathcal{F}[u(t,\cdot)](z) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t,x)e^{-ixz}dx.$$

Entonces
$$\mathcal{F}[u_{xx}(t,\cdot)](z) = -z^2\mathcal{F}[u(t,\cdot)](z),$$
y por la fórmula de derivación bajo el signo de la integral
$$\begin{aligned}\mathcal{F}[u_t(t,\cdot)](z) &= \int_{-\infty}^{\infty} u_t(t,x)e^{-ixz}dx \\ &= \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} u(t,x)e^{-ixz}dx = \frac{d}{dt}\mathcal{F}[u(t,\cdot)](z),\end{aligned}$$
por lo que la ecuanción $u_t = u_{xx}$ se transforma en
$$-z^2\mathcal{F}[u(t,\cdot)](z) = \frac{d}{dt}\mathcal{F}[u(t,\cdot)](z).$$
La condición incial se transforma en
$$\begin{aligned}\mathcal{F}[u(0,\cdot)](z) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(0,x)e^{-ixz}dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixz}dx = \mathcal{F}[f](z),\end{aligned}$$
por lo que tenemos el problema de condiciones iniciales
$$\begin{cases} -z^2\mathcal{F}[u(t,\cdot)](z) = \frac{d}{dt}\mathcal{F}[u(t,\cdot)](z), \ t>0, \\ \mathcal{F}[u(0,\cdot)](z) = \mathcal{F}[f](z), \end{cases}$$
que como sabemos del cálculo de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias tiene por solución
$$\mathcal{F}[u(t,\cdot)](z) = \mathcal{F}[f](z)e^{-z^2t}.$$
La solución de la ecuación la escribimos formalmente como
$$\begin{aligned}u(t,x) &= \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f](z)e^{-z^2t}](x) = f(x)*\mathcal{F}^{-1}[e^{-z^2t}](x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-s)\mathcal{F}^{-1}[e^{-z^2t}](s)ds.\end{aligned}$$
Calculamos entonces $\mathcal{F}^{-1}[e^{-z^2t}](x)$ teniendo en cuenta que
$$\mathcal{F}[e^{-x^2/2}](z) = \sqrt{2\pi}e^{-z^2/2}.$$
Partiendo de esta expresión y haciendo el cambio de escala $y = x/\sqrt{2t}$ tenemos que
$$\begin{aligned}\mathcal{F}[e^{-y^2/2}](z) &= \mathcal{F}[e^{-x^2/2t}](z) = \sqrt{2t}\mathcal{F}[e^{-x^2/2}](z\sqrt{2t}) \\ &= \sqrt{2t}\sqrt{2\pi}e^{-(z\sqrt{2t})^2/2} = 2\sqrt{\pi t}e^{-tz^2},\end{aligned}$$
por lo que
$$\mathcal{F}^{-1}[e^{-z^2t}](x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-x^2/2t}.$$
Entonces
$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-s)\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-s^2/2t}ds$$

2.6. Ejercicios

1. Encontrar la transformada de Fourier de las siguientes funciones ($a > 0$):

   a) $f(x) = \begin{cases} \cos x & |x| < \pi/2, \\ 0 & |x| \geq \pi/2. \end{cases}$

   b) $f(x) = \begin{cases} x & |x| < a, \\ 0 & |x| \geq a. \end{cases}$

   c) $f(x) = \begin{cases} a - |x| & |x| < a, \\ 0 & |x| \geq a. \end{cases}$

2. Calcular la convolución $f * f$ es los siguientes casos ($a > 0$):

   a) $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < a, \\ 0 & |x| \geq a. \end{cases}$

   b) $f(x) = e^{-|x|}$.

3. Calcular la transformada de Fourier inversa de la función $F(z) = e^{-z^2}/(1 + z^2)$.

4. Si $g(t) = f(t - a)$, demostrar la fórmula

$$\mathcal{F}[g](z) = e^{-iza}\mathcal{F}[f](z).$$

5. Resolver el problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \ x \in \mathbb{R}, \ t > 0, \\ u(0, x) = f(x), \ x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

   donde:

   a) $f(x) = e^{-ax^2}$.

   b) $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < a, \\ 0 & |x| \geq a. \end{cases}$

   c) $f(x) = h_0(x)$ siendo h_0 la función de Heaviside.

6. Utilizar la transformada de Fourier para obtener la solución formal del problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + au_x, \ x \in \mathbb{R}, \ t > 0, \\ u(0, x) = f(x), \ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

7. Utilizar la transformada de Fourier para obtener la solución formal del problema

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \ x \in \mathbb{R}, \ 0 < y < 1, \\ u(x, 0) = 0, \ x \in \mathbb{R}, \\ u(x, 1) = f(x), \ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Bibliografía

[BaJi] F. Balibrea y V. Jiménez López, *Ecuaciones diferenciales para las ciencias químicas y físicas,* DM–Universidad de Murcia, 2001.

[BoPr] W. E. Boyce y R. C. DiPrima, *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera,* Limusa, Mexico, 1996.

[Bra] M. Braun, *Differential equations and their applications,* Springer–Verlag, Berlin, 1993.

[Dav] B. Davies, *Integral transforms and their applications,* Springer–Verlag, Berlin, 1985.

[Jam] G. James y otros, *Advanced modern engineering mathematics (*2^a edición*),* Addison–Wesley 1999.

[Jef] A. Jeffrey, *Linear algebra and ordinary differential equations,* CRC Press, 1993.

[Oga1] K. Ogata, *Ingeniería de control moderna,* Prentice Hall, 1998.

[MaHo] J. E. Marsden y M. J. Hoffman, *Basic complex analysis,* W. H. Freeman & Co., 1999.

[NaSa] R. K. Nagle y E. B. Saff, *Fundamentos de ecuaciones diferenciales (*2^a edición*),* Addison Wesley Longman, 1992.

[Sen] T. B. A. Senior, *Mathematical methods in electrical engineering,* Cambridge University Press 1986.

[Sim] G. F. Simmons, *Ecuaciones diferenciales (con aplicaciones y notas históricas), 2ª Edición,* McGraw–Hill, 1993.

[Sot] J. Sotomayor, *Licoes de ecuaciones diferenciais ordinárias,* Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.