Teoría Cualitativa de Ecuaciones Diferenciales.

Jose Salvador Cánovas Peña.
Departamento de Matemática Aplicada y Estadística.

Índice general

Capítulo 1

Estabilidad de ecuaciones diferenciales

1.1. Ecuaciones y sistemas lineales: generalidades

Para nosotros, un sistema de ecuaciones diferenciales es una expresión de la forma

$$\begin{cases} F_1(t, y_1, y_1', y_2, y_2', ..., y_m, y_m') = 0; \\ F_2(t, y_1, y_1', y_2, y_2', ..., y_m, y_m') = 0; \\ \vdots \\ F_m(t, y_1, y_1', y_2, y_2', ..., y_m, y_m') = 0; \end{cases}$$

donde $y_1, y_2, ..., y_m$ son funciones reales a determinar que dependen de t y $F_i : A \subseteq \mathbb{R}^{1+2m} \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$, son funciones reales de varias variables. Se suele suponer que hay igual número de ecuaciones que de incógnitas de manera que todas las ecuaciones son independientes, es decir, ninguna puede deducirse de las demás. Estamos interesados en aquellos sistemas de ecuaciones diferenciales en los que podemos despejar la primera derivada de cada una de las funciones incógnita, es decir, sistemas de la forma

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, y_2, ..., y_m); \\ y_2' = f_2(t, y_1, y_2, ..., y_m); \\ \vdots \\ y_m' = f_m(t, y_1, y_2, ..., y_m); \end{cases}$$

donde $f_i : A \subseteq \mathbb{R}^{1+m} \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$, son funciones reales. Ejemplos de estos sistemas son

$$\begin{cases} y_1' = ty_1 + y_2^2; \\ y_2' = t + y_1 + y_2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1' = ty_1 + y_2^2 - y_3; \\ y_2' = t + y_1 + y_2 y_3; \\ y_3' = y_1 y_2 y_3; \end{cases}$$

En general la resolución de estos sistemas no es posible, salvo en casos excepcionales. Sólo para el caso de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, que veremos un poco más tarde existen algoritmos que permiten el cálculo explícito de las soluciones. Sin embargo, es relativamente sencillo saber cuándo un sistema tiene solución, o más precisamente cuándo un problema de condiciones iniciales asociado tiene solucón. Primero claro está, debemos definir qué entendemos por un problema de condiciones iniciales para sistemas de ecuaciones diferenciales. Dicho problema es un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left\{\begin{array}{l} y_1' = f_1(t, y_1, y_2, ..., y_m); \\ y_2' = f_2(t, y_1, y_2, ..., y_m); \\ \vdots \\ y_m' = f_m(t, y_1, y_2, ..., y_m); \\ y_1(t_0) = y_1, y_2(t_0) = y_2, ..., y_m(t_0) = y_m \end{array}\right.$$

junto con las condiciones $y_i(t_0) = y_i$, donde $t_0, y_1, y_2, ..., y_m$ son números reales. Por ejemplo

$$\left\{\begin{array}{l} y_1' = ty_1 + y_2^2 - y_3; \\ y_2' = t + y_1 + y_2y_3; \\ y_3' = y_1y_2y_3; \\ y_1(0) = 2, y_2(0) = 0, y_3(0) = 1, \end{array}\right.$$

es un problema de condiciones iniciales. Nótese que todas las condiciones iniciales implican el conocimiento de la función en 0, es decir, lo siguiente

$$\left\{\begin{array}{l} y_1' = ty_1 + y_2^2 - y_3; \\ y_2' = t + y_1 + y_2y_3; \\ y_3' = y_1y_2y_3; \\ y_1(0) = 2, y_2(1) = 0, y_3(0) = 1, \end{array}\right.$$

no sería un problema de condiciones iniciales, ya que conocemos y_2 en 1 e y_1 e y_3 en 0.

Para el caso de los problemas de condiciones iniciales para sistemas de ecuaciones diferenciales tenemos el siguiente resultado análogo al de ecuaciones diferenciales de orden uno.

Teorema 1 *Sea el problema de condiciones iniciales*

$$\left\{\begin{array}{l} y_1' = f_1(t, y_1, y_2, ..., y_m); \\ y_2' = f_2(t, y_1, y_2, ..., y_m); \\ \vdots \\ y_m' = f_m(t, y_1, y_2, ..., y_m); \\ y_1(t_0) = y_1, y_2(t_0) = y_2, ..., y_m(t_0) = y_m \end{array}\right.$$

donde $(t_0, y_1, ..., y_m) \in A$*,* $f_i : A \subseteq \mathbb{R}^{1+m} \to \mathbb{R}$*,* $1 \leq i \leq m$*, son funciones reales continuas en el abierto* A*. Supongamos además que las funciones* $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ *existen y son continuas en* A*. Entonces existe una solución del problema de condiciones iniciales anterior* $y_i : I \to \mathbb{R}$*,* $1 \leq i \leq m$*, definido en un intervalo abierto* I *de la recta real.*

Este resultado es fácil de aplicar. Por ejemplo el problema que consideramos anteriormente

$$\begin{cases} y_1' = ty_1 + y_2^2 - y_3; \\ y_2' = t + y_1 + y_2 y_3; \\ y_3' = y_1 y_2 y_3; \\ y_1(0) = 2, y_2(0) = 0, y_3(0) = 1, \end{cases}$$

es tal que $f_1(t, y_1, y_2, y_3) = ty_1 + y_2^2 - y_3$, $f_2(t, y_1, y_2, y_3) = t + y_1 + y_2 y_3$ y $f_3(t, y_1, y_2, y_3) = y_1 y_2 y_3$ son funciones definidas en $\mathbb{R}^4$, continuas y las derivadas parciales de cada función respecto de y_1, y_2 e y_3 son continuas. Entonces este problema de condiciones iniciales tiene solución única, aunque no tengamos ni idea de cómo calcularla. Se verán en la asignatura de tercer curso métodos numéricos para obtener soluciones aproximadas, y en esta misma asignatura estudiaremos cómo obtener información parcial sobre el sistema incluso sin conocer las soluciones.

1.1.1. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

Como hemos comentado anteriormente en general no va a ser posible resolver sistemas de ecuaciones diferenciales salvo en ciertos casos particulares. Uno de ellos va a ser el de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes, cuya teoría general pasamos a estudiar. Vamos a ver a continuación cómo son las soluciones de un sistema de este tipo, pero antes necesitamos conocer un poco más sobre éstos. Un sistema de *ecuaciones diferenciales lineales* es una expresión de la forma

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(t)y_1 + a_{12}(t)y_2 + ... + a_{1n}(t)y_n + b_1(t) \\ y_2' = a_{21}(t)y_1 + a_{22}(t)y_2 + ... + a_{2n}(t)y_n + b_2(t) \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}(t)y_1 + a_{n2}(t)y_2 + ... + a_{nn}(t)y_n + b_n(t) \end{cases}$$

donde para cada $1 \leq i, j \leq n$, a_{ij} y b_j son funciones reales definidas sobre un intervalo I. Si denotamos por

$$\mathbf{A}(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i \leq n}^{1 \leq j \leq n} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & ... & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & ... & a_{2n}(t) \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & ... & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

y por

$$\mathbf{b}(t) = (b_1(t), b_2(t), ..., b_n(t))^t = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ ... \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

e

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)^t = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix},$$

el sistema anterior puede escribirse de forma matricial como

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{y} + \mathbf{b}(t), \tag{1.1}$$

donde por $\mathbf{y}'$ se entenderá la derivada coordenada a coordenada, es decir,

$$\mathbf{y}' = (y_1', y_2', ..., y_n')^t = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ ... \\ y_n' \end{pmatrix}.$$

Por ejemplo, los sistemas

$$\begin{cases} y_1' = ty_1 + e^t y_2 + 1 - t^2, \\ y_2' = y_1 - y_2 + e^{-t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + t^2 y_2 + y_3 + 1 - t^2, \\ y_2' = ty_1 - t^2 y_2 + e^{-t}, \\ y_3' = y_1 + (1-t)y_2 + y_3 \end{cases}$$

son lineales. Un sistema se dirá *homogéneo* si $\mathbf{b}(t) = (0, 0, ..., 0)^t$, es decir, el sistema

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + t^2 y_2 + y_3, \\ y_2' = ty_1 - t^2 y_2, \\ y_3' = y_1 + (1-t)y_2 + y_3 \end{cases}$$

es homogéneo. Se dirá *no homogéneo* en caso contrario. Nosotros le prestaremos una gran atención a los sistemas lineales con coeficioentes constantes. Un sistema de ecuaciones diferenciales lineales se dirá de *coeficientes constantes* si la matriz $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}$ es constante. Ejemplos de tales sistemas, tanto homogéneos como no homogéneos son

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 + 1 - t^2, \\ y_2' = y_1 - y_2 + e^{-t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2 + y_3, \\ y_2' = y_1 - y_2 + 7y_3, \\ y_3' = -4y_1 + y_2 + y_3. \end{cases}$$

Veremos en los sucesivos temas cómo resolver estos últimos sistemas, dando un algoritmo que permitirá el cálculo de la solución general del mismo.

Previamente, estudiaremos la teoría general de los sistemas de ecuaciones lineales y para posteriormente particularizarla al caso de las ecuaciones lineales de orden mayor o igual que dos (ver la última sección de este tema). Esta teoría general de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales se sustenta en la noción de espacio vectorial de dimensión finita estudiadas en la parte de álgebra lineal impartida durante el curso y utiliza el siguiente resultado sobre existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones y sistemas que se deducen directamente del Teorema 1.

Teorema 2 *Sea $\mathbf{y}' = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{y} + \mathbf{b}(t)$ un sistema de ecuaciones diferenciales lineales donde $\mathbf{A}$ y $\mathbf{b}$ están definidas en un intervalo $I_{x_0} = [t_0 - a, t_0 + a]$. Si estas funciones son continuas en dicho intervalo, entonces el problema de condiciones iniciales*

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{y} + \mathbf{b}(t) \\ \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

tiene solución única definido en todo I_{t_0}.

Es importante tener claro para entender la teoría que a continuación vamos a desarrollar que bajo la notación que estamos utilizando, una solución de un sistema lineal es una función $\mathbf{y} : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, o dicho de otro modo, un vector cuyas componentes son funciones reales. Por ejemplo, dado el sistema

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -y_1, \end{cases}$$

una solución del mismo es $\mathbf{y}(t) = (\sin t, \cos t)^t$, es decir, $y_1(t) = \sin t$ e $y_2(t) = \cos t$.

1.2. Resolución de sistemas lineales de coeficientes constantes

Vamos a considerar sistemas de la forma

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{b}(t), \tag{1.2}$$

donde $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n}^{1 \leq j \leq n}$ es una matriz cuadrada, $\mathbf{b}(t) = (b_1(t), b_2(t), ..., b_n(t))^t$ donde para $1 \leq j \leq n$, b_j son funciones reales definidas sobre un intervalo de la recta real I e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)^t$. Los métodos que vamos a estudiar son matriciales por lo que es necesario tener frescos conceptos sobre la teoría de matrices y especialmente con la diagonalización de éstas.

1.2.1. Resolución del sistema homogéneo

Cosideraremos sistemas homogéneos de la forma

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y},$$

donde $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n}^{1 \leq j \leq n}$ es una matriz cuadrada. Veamos el teorema de Cayley Hamilton, que puede ser útil.

Teorema de Cayley–Hamilton

Supongamos que $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n}^{1 \leq j \leq n}$ es una matriz cuadrada y $q(t) = a_k t^k + a_{k-1} t^{k-1} + ... + a_1 t + a_0$, es un polinomio de coeficientes reales. Si intercambiamos t por $\mathbf{A}$ construimos lo que denominaremos un polinomio matricial

$$q(\mathbf{A}) = a_k \mathbf{A}^k + a_{k-1} \mathbf{A}^{k-1} + ... + a_1 \mathbf{A} + a_0 \mathbf{I}_n.$$

Nótese que el término independiente del polinomio aparece multiplicado por la matriz identidad $\mathbf{I}_n$. Por ejemplo, si

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

y $q(t) = t^3 + 2t - 1$, entonces

$$\begin{aligned} q(\mathbf{A}) &= \mathbf{A}^3 + 2\mathbf{A} - \mathbf{I}_2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^3 + 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 38 & 58 \\ 87 & 125 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

El Teorema de Cayley–Hamilton afirma lo siguiente.

Teorema 3 ***(Cayley–Hamilton).*** *Sea $\mathbf{A} = (a_{ij})$ una matriz cuadrada y sea $p(x) = |\mathbf{A} - t \cdot \mathbf{I}_n|$ su polinomio característico. Entonces $p(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$.*

Demostración. Como sabemos,

$$|\mathbf{A} - t \cdot \mathbf{I}_n| \cdot \mathbf{I}_n = p(t) \cdot \mathbf{I}_n = (\overline{\mathbf{A} - t \cdot \mathbf{I}_n})^t \cdot (\mathbf{A} - t \cdot \mathbf{I}_n),$$

donde $(\overline{\mathbf{A} - t \cdot \mathbf{I}_n})^t$ es la matriz traspuesta de la adjunta de $\mathbf{A} - t \cdot \mathbf{I}_n$. Entonces $(\overline{\mathbf{A} - t \cdot \mathbf{I}_n})^t = (q_{ij}(t))$, donde $q_{ij}(t)$ son polinomios reales en t de grado a lo sumo $n-1$. Podemos reordenar dicha matriz como

$$(\overline{\mathbf{A} - t \cdot \mathbf{I}_n})^t = \mathbf{B}_1 \cdot t^{n-1} + \mathbf{B}_2 \cdot t^{n-2} + ... + \mathbf{B}_{n-1} \cdot t + \mathbf{B}_n,$$

donde $\mathbf{B}_i \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Entonces

$$\begin{aligned} p(t) \cdot \mathbf{I}_n &= (\mathbf{B}_1 \cdot t^{n-1} + \mathbf{B}_2 \cdot t^{n-2} + ... + \mathbf{B}_{n-1} \cdot t + \mathbf{B}_n) \cdot (\mathbf{A} - t \cdot \mathbf{I}_n) \\ &= -\mathbf{B}_1 \cdot t^n + (\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{A} - \mathbf{B}_2) \cdot t^{n-1} + ... + (\mathbf{B}_{n-1} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{B}_n) \cdot t + \mathbf{B}_n \cdot \mathbf{A}, \end{aligned}$$

de donde sustituyendo t por la matriz $\mathbf{A}$ tenemos

$$\begin{aligned} p(\mathbf{A}) &= p(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{I}_n \\ &= -\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{A}^n + (\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{A} - \mathbf{B}_2) \cdot \mathbf{A}^{n-1} + ... + (\mathbf{B}_{n-1} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{B}_n) \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B}_n \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

con lo que termina la demostración.□

A modo de ejemplo, dada la matriz anterior, su polinomio característico es

$$p(t) = t^2 - 5t - 2,$$

y si calculamos

$$\begin{aligned} p(\mathbf{A}) &= \mathbf{A}^2 - 5\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_2 \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

El polinomio característico de una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ no tiene porqué ser el de menor grado que satisfaga el teorema de Cayley–Hamilton. Un polinomio $q(t)$ se dice mínimo para la matriz cuadrada $\mathbf{A}$ si $q(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$. En general se sabe que $q(t)$ divide al polinomio característico de $\mathbf{A}$, es decir, dicho polinomio será de la forma

$$q(t) = (t - \lambda_1)^{r_1} \cdot ... \cdot (t - \lambda_p)^{r_p},$$

donde λ_i, $1 \leq i \leq p$ son los valores propios de $\mathbf{A}$ y $r_i \leq n_i$, donde n_i es la multiplicidad de λ_i, $i = 1, ..., p$, relativa al polinomio característico. En particular, $r = r_1 + ... + r_p \leq n$, donde n es el grado del polinomio característico $p(t)$.

Como sabemos, para que la matriz $\mathbf{A}$ sea diagonalizable tiene que cumplirse que si

$$p(t) = (-1)^n (t - \lambda_1)^{n_1} \cdot ... \cdot (t - \lambda_p)^{n_p},$$

entonces para cada valor propio λ_i debe cumplirse que su multiplicidad algebraica $n_i = \dim \operatorname{Ker}(\mathbf{A} - \lambda_i \cdot \mathbf{I}_n)$, donde $\operatorname{Ker}(\mathbf{A} - \lambda_i \cdot \mathbf{I}_n)$ es el subespacio propio asociado al valor propio λ_i. Esta condición es equivalente a que $r_i = 1$, siendo r_i el exponente del monomio $t - \lambda_i$ en el polinomio mínimo.

Veamos un par de ejemplos. Consideremos la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

que tiene valores propios 1 (doble) y 2 (simple). Esta matriz será diagonalizable si su polinomio mínimo es $q(t) = (t - 1)(t - 2)$. Calculamos

$$q(\mathbf{A}) = (\mathbf{A} - \mathbf{I}_3) \cdot (\mathbf{A} - 2 \cdot \mathbf{I}_3) = \mathbf{0},$$

por lo que dicha matriz es diagonalizable. Sin embargo la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene los mismos valores propios con las mismas multiplicidades y sin embargo

$$q(\mathbf{A}) = (\mathbf{A} - \mathbf{I}_3) \cdot (\mathbf{A} - 2 \cdot \mathbf{I}_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

por lo que no puede ser diagnalizable.

Además, si λ_i es valor propio de $\mathbf{A}$, para comprobar la relación $n_i = \dim \operatorname{Ker}(\mathbf{A} - \lambda_i \cdot \mathbf{I}_n)$, basta comprobar que $q_i(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, siendo

$$q_i(t) = (t - \lambda_i) \frac{p(t)}{(t - \lambda_i)^{n_i}}.$$

1.2.2. La exponencial de una matriz

En esta sección vamos a obtener una fórmula para resolver sistemas de ecuaciones de la forma

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}, \tag{1.3}$$

donde $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada de coeficientes reales. Para esto, debemos recordar un caso particular de éste cuando la matriz es de una fila y una columna, es decir, cuando tenemos la ecuación lineal homogénea de orden uno

$$y' = ay, \ a \in \mathbb{R}.$$

En este caso, la solución general de esta ecuación es de la forma

$$y(x) = e^{at}c, \ c \in \mathbb{R}.$$

Por analogía con el caso unidimensional, para el caso general la solución del sistema (1.3) va a ser de la forma

$$\mathbf{y}(t) = e^{\mathbf{A}\cdot t} \cdot \mathbf{C},$$

donde $\mathbf{C}$ es un vector columna constante y $e^{\mathbf{A}\cdot t}$ es la exponencial de la matriz $\mathbf{A} \cdot t$ definida por la serie

$$e^{\mathbf{A}\cdot t} := \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{A}^i \cdot \frac{t^i}{i!}.$$

Para hacer más comprensible este capítulo, vamos a dar algunas nociones sobre la exponencial de una matriz.

La exponencial de una matriz

Consideremos una matriz cuadrada $\mathbf{A}$. Como hemos definido anteriormente, la exponencial de dicha matriz viene definida, en analogía con la exponencial de un número real, viene dada por la serie

$$e^{\mathbf{A}} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{A}^i \cdot \frac{1}{i!},$$

donde supondremos que $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}_n$. Esta serie siempre es convergente, es decir, para toda matriz cuadrada con coeficientes reales la serie anterior nos proporciona una matriz de coeficientes reales.

Hay casos en los que es bastante sencillo calcular la exponencial de una matriz. Por ejemplo, si $\mathbf{D} = \mathrm{diag}(d_1, ..., d_n)$ es una matriz diagonal, entonces para todo número natural i se tiene que $\mathbf{D}^i = \text{diag}(d_1^i, ..., d_n^i)$ y entonces

$$\begin{aligned}
e^{\mathbf{D}} &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{D}^i \cdot \frac{1}{i!} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \text{diag}(d_1^i, ..., d_n^i) \cdot \frac{1}{i!} \\
&= \text{diag}\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{d_1^i}{i!}, ..., \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d_n^i}{n!} \right) \\
&= \text{diag}(e^{d_1}, ..., e^{d_n}).
\end{aligned}$$

Por ejemplo, si

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

entonces

$$e^{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2} \end{pmatrix}.$$

Además, la exponencial de una matriz cumple la siguientes propiedades (que no justificaremos). Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices cuadradas que conmutan, esto es $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, entonces

$$e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}} \cdot e^{\mathbf{B}}. \tag{1.4}$$

Dado el vector columna $\mathbf{C}$, la función $\mathbf{y}(t) = e^{\mathbf{A} \cdot t} \cdot \mathbf{C}$ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$, es derivable y

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}'(t) &= \frac{d}{dt} e^{\mathbf{A} \cdot t} \cdot \mathbf{C} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \cdot \mathbf{A}^n \right) \cdot \mathbf{C} \\
&= {}_* \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dt} \left(\frac{t^n}{n!} \cdot \mathbf{A}^n \right) \cdot \mathbf{C} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \mathbf{A}^n \cdot \mathbf{C} \\
&= \mathbf{A} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \cdot \mathbf{A}^n \cdot \mathbf{C} \\
&= \mathbf{A} \cdot e^{\mathbf{A} \cdot t} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}(t),
\end{aligned}$$

es decir, es solución del sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes (1.3).

Ahora bien, consideremos el sistema

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

La solución de este sistema es la matriz

$$e^{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot t} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

pero ¿cómo calculamos dicha matriz? A continuación vamos a ver un método basado en la transformada de Laplace.

1.3. Resolviendo sistemas mediante la transformada de Laplace

Supongamos que tenemos un sistema de ecuaciones lineales de la forma

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}(t) + \mathbf{f}(t) \tag{1.5}$$

donde $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada de n filas por n columnas con coeficientes reales, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_n)^t$ donde f_i son funciones dadas e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)^t$ es la función vectorial incógnita. Como vemos, no es necesariamente homogéneo. Supongamos además las condiciones iniciales

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \tag{1.6}$$

donde $\mathbf{y}_0 = (y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0)^t$ con y_i^0 números reales para $1 \leq i \leq n$. Sea

$$\mathcal{L}[\mathbf{y}](z) = (\mathcal{L}[y_1](z), \mathcal{L}[y_2](z), ..., \mathcal{L}[y_n](z))^t.$$

Entonces, tomando la Transformada de Laplace en (1.5) y teniendo en cuenta (1.6) obtenemos que

$$z\mathcal{L}[\mathbf{y}](z) - \mathbf{y}_0 = \mathbf{A} \cdot \mathcal{L}[\mathbf{y}](z) + \mathcal{L}[\mathbf{f}](z),$$

de donde, si $\mathbf{I}_n$ denota la matriz identidad,

$$(z\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) \cdot \mathcal{L}[\mathbf{y}](z) = \mathbf{y}_0 + \mathcal{L}[\mathbf{f}](z),$$

y de aquí

$$\mathcal{L}[\mathbf{y}](z) = (z\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1} \cdot (\mathbf{y}_0 + \mathcal{L}[\mathbf{f}](z)). \tag{1.7}$$

Una vez calculada de este modo $\mathcal{L}[\mathbf{y}](z)$ obtendremos $\mathbf{y}$ tomando la Transformada inversa.

Por ejemplo consideremos el sistema

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

junto con las condiciones iniciales

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

De (1.7)

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \mathcal{L}[y_1](z) \\ \mathcal{L}[y_2](z) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} z-2 & 3 \\ -3 & z-2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2+\frac{1}{z} \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{z^2-4z+13} \begin{pmatrix} z-2 & -3 \\ 3 & z-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2z+1}{z} \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2z^2-2}{z(z^2-4z+13)} \\ \frac{-z^2+8z+3}{z(z^2-4z+13)} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Entonces la solución del problema viene dada por

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathcal{L}^{-1}[\frac{2z^2-2}{z(z^2-4z+13)}](t) \\ \mathcal{L}^{-1}[\frac{-z^2+8z+3}{z(z^2-4z+13)}](t) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 28e^{2t}\cos(3t) + 16e^{2t}\sin(3t) - 2 \\ 28e^{2t}\sin(3t) - 16e^{2t}\cos(3t) + 3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

1.4. Problemas con funciones discontinuas

Supongamos que el problema

$$\begin{cases} y'' + y = f(t); \\ y(0) = 0, \ y'(0) = 1; \end{cases}$$

viene dada ahora con la función discontinua

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t < \pi, \\ \cos(2t) & \text{si } t \geq \pi. \end{cases}$$

Podemos escribir ahora

$$(z^2+1)\mathcal{L}[y](z) = 1 + \mathcal{L}[f](z).$$

Por otra parte

$$f(t) = t(h_0(t) - h_\pi(t)) + h_\pi(t)\cos(2t),$$

con lo que

$$\mathcal{L}[f](z) = \mathcal{L}[th_0(t)](z) + \mathcal{L}[th_\pi(t)](z) + \mathcal{L}[h_\pi(t)\cos(2t)](z).$$

Desarrollando cada sumando por separado, obtenemos

$$\mathcal{L}[th_0(t)](z) = 1/z^2.$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[th_\pi(t)](z) &= \mathcal{L}[(t-\pi)h_\pi(t)](z) + \pi\mathcal{L}[h_\pi(t)](z) \\
&= \frac{e^{-\pi z}}{z^2} + \pi\frac{e^{-\pi z}}{z}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[h_\pi(t)\cos(2t)](z) &= \mathcal{L}[h_\pi(t)\cos(2(t-\pi))](z)\\ &= e^{-\pi z}\frac{z}{z^2+4}.\end{aligned}$$

Combinando estas expresiones tenemos

$$(z^2+1)\mathcal{L}[f](z)+1=\frac{z^2+1}{z^2}+e^{-\pi z}\left(\frac{1}{z^2}+\frac{\pi}{z}+\frac{z}{z^2+4}\right).$$

Entonces

$$\mathcal{L}[y](z)=\frac{z^2+1}{z^2(z^2+1)}+e^{-\pi z}\left(\frac{1}{z^2(z^2+1)}+\frac{\pi}{z(z^2+1)}+\frac{z}{(z^2+4)(z^2+1)}\right),$$

y así

$$\begin{aligned}y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2}\right](t)+\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-\pi z}\frac{1}{z^2(z^2+1)}\right](t)+\pi\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-\pi z}\frac{1}{z(z^2+1)}\right](t)\\ &\quad +\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-\pi z}\frac{z}{(z^2+4)(z^2+1)}\right](t)\\ &= t+f_1(t-\pi)h_\pi(t)+\pi f_2(t-\pi)h_\pi(t)+f_3(t-\pi)h_\pi(t),\end{aligned}$$

donde las funciones f_1, f_2 y f_3 se determinan de la siguiente manera.

$$f_1(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2(z^2+1)}\right](t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2}\right](t)-\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2+1}\right](t)=t-\sin t.$$

$$f_2(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z(z^2+1)}\right](t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z}\right](t)-\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z}{z^2+1}\right](t)=1-\cos t.$$

$$\begin{aligned}f_3(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z}{(z^2+4)(z^2+1)}\right](t)\\ &= \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z}{z^2+1}\right](t)-\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z}{z^2+4}\right](t)=\frac{1}{3}\cos t-\frac{1}{3}\cos(2t).\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}y(t) &= t+h_\pi(t)[(t-\pi)-\sin(t-\pi)+\pi-\pi\cos(t-\pi)+\frac{1}{3}\cos(t-\pi)-\frac{1}{3}\cos(2t-2\pi)]\\ &= (1-h_\pi(t))t+h_\pi(t)[2t+\sin t+(3\pi-1)/3\cos t-\cos(2t)/3],\end{aligned}$$

o equivalentemente

$$y(t)=\begin{cases} t & \text{si } 0\le t<\pi,\\ 2t+\sin t-(3\pi-1)/3\cos t-\cos(2t)/3 & \text{si } t\ge\pi.\end{cases}$$

1.5. Forma teórica de la solución de sistemas no homogéneos

Como hemos visto, la solución de un sistema lineal homogéneo $\mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}$ es

$$\mathbf{y}(t) = e^{\mathbf{A} \cdot t} \cdot \mathbf{C},$$

donde $\mathbf{C}$ es un vector constante. Si lo que tenemos ahora es un sistema no homogéneo de la forma

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{f}(t),$$

el siguiente resultado nos dice cómo es la estructura de las soluciones.

Teorema 4 *La solución del sistema no homogéneo*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{f}(t)$$

es de la forma

$$\mathbf{y}(t) = e^{\mathbf{A} \cdot t} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{y}_p(t),$$

donde $\mathbf{C}$ *es un vector constante e* $\mathbf{y}_p(t)$ *es una solución particular del problema no homogéneo.*

Demostración. Sea $\mathbf{y}_p(t)$ una solución particular conocida del problema no homogéneo y sea $\mathbf{y}(t)$ otra solución. Definimos $\mathbf{z}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_p(t)$. Derivando esta función

$$\begin{aligned}
\mathbf{z}'(t) &= \mathbf{y}'(t) - \mathbf{y}_p'(t) \\
&= \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}(\mathbf{t}) + \mathbf{f}(t) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{y}_p(t) + \mathbf{f}(t)) \\
&= \mathbf{A} \cdot \Big(\mathbf{y}(\mathbf{t}) - \mathbf{y}_p(t)\Big) \\
&= \mathbf{A} \cdot z(\mathbf{t}),
\end{aligned}$$

nos damos cuenta de que es solución del problema homogéneo. Entonces

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_p(t) = e^{\mathbf{A} \cdot t} \cdot \mathbf{C}$$

donde $\mathbf{C}$ es un vector constante. Despejando $\mathbf{y}(t)$ obtenemos

$$\mathbf{y}(t) = e^{\mathbf{A} \cdot t} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{y}_p(t),$$

lo que termina la prueba. □

En cierta forma el resultado es esperable porque según vimos al aplicar la transformada de Laplace al sistema tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\mathbf{y}](z) &= (z\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1} \cdot (\mathbf{y}_0 + \mathcal{L}[\mathbf{f}](z)) \\
&= (z\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{y}_0 + (z\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathcal{L}[\mathbf{f}](z)).
\end{aligned}$$

Cuando $\mathbf{f}(t) = \mathbf{0}$ el sistema es homogéneo y tenemos

$$\mathcal{L}[\mathbf{y}](z) = (z\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{y}_0$$

y por tanto

$$\mathbf{y}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[(z\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{y}_0\right](t) = e^{\mathbf{A}\cdot t} \cdot \widetilde{\mathbf{C}},$$

donde $\widetilde{\mathbf{C}}$ es un vector que no necesariamente coincide con el $\mathbf{C}$ del anterior teorema. Por ejemplo consideremos el sistema

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

junto con las condiciones iniciales

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

tiene por solución

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 28e^{2t}\cos(3t) + 16e^{2t}\sin(3t) - 2 \\ 28e^{2t}\sin(3t) - 16e^{2t}\cos(3t) + 3 \end{pmatrix},$$

mientras que el problema homogéneo con las mismas condiciones iniciales tiene por transformada

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathcal{L}[y_1](z) \\ \mathcal{L}[y_2](z) \end{pmatrix} &= \frac{1}{z^2 - 4z + 13} \begin{pmatrix} z-2 & -3 \\ 3 & z-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{z^2 - 4z + 13} \begin{pmatrix} 2z - 1 \\ 8 - z \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t}(\sin(3t) + 2\cos(3t)) \\ e^{2t}(2\sin(3t) - \cos(3t)) \end{pmatrix}.$$

1.6. Estabilidad

Consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$$

donde $\mathbf{f} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ es una función con regularidad suficiente para satisfacer la unicidad de soluciones para un problema de condiciones iniciales o de Cauchy. Si la variable independiente t no aparece explícitamente en las ecuaciones del sistema, es decir, el sistema es de la forma

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$$

donde $\mathbf{f} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, se dice que el sistema de ecuaciones es autónomo. Por ejemplo, el sistema

$$\begin{cases} x' = y - x + t, \\ y' = xy, \end{cases}$$

es no autónomo mientras que

$$\begin{cases} x' = y - x, \\ y' = xy, \end{cases} \tag{1.8}$$

o

$$y' = 4y(1-y) \tag{1.9}$$

son autónomos. Veamos qué se entiende por estabilidad.

Definición 1 *Sea el sistema autónomo*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}) \tag{1.10}$$

donde $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ *y* $\mathbf{f} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *es una función con funciones coordenadas* $f_1, f_2, ..., f_n$*. Una solución* $\mathbf{y}(t)$ *de (1.10) definida para todo* $t \geq 0$ *se dice* estable *si para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que si* $\mathbf{z}(t)$ *es otra solución que cumple la condición* $||\mathbf{y}(0) - \mathbf{z}(0)|| < \delta$ *entonces* $\mathbf{z}(t)$ *está definida para todo* $t \geq 0$ *y se verifica que* $||\mathbf{z}(t) - \mathbf{y}(t)|| < \varepsilon$ *para todo* $t \geq 0$*. Si además se verifica que*

$$\lim_{t\to\infty} ||\mathbf{z}(t) - \mathbf{y}(t)|| = 0$$

la solución $\mathbf{y}(t)$ *se dirá* asintóticamente estable*. La solución* $\mathbf{y}(t)$ *se dirá* inestable *si no es estable.*

Por ejemplo, consideremos la ecuación

$$y' = y,$$

cuyas soluciones son de la forma

$$y(t) = y_0 e^{t-t_0}$$

para condiciones iniciales $y(t_0) = y_0$. Claramente, para dos soluciones $y_1(t)$ e $y_2(t)$ se verifica que

$$\begin{aligned} \lim_{t\to+\infty} |y_2(t) - y_1(t)| &= \lim_{t\to+\infty} |y_2(t_0)e^{t-t_0} - y_1(t_0)e^{t-t_0}| \\ &= \lim_{t\to+\infty} |y_2(t_0) - y_1(t_0)|e^{t-t_0} = +\infty, \end{aligned}$$

si $y_2(t_0) \neq y_1(t_0)$, por lo que todas las soluciones de dicha ecuación son inestables. Nótese además de que las dos soluciones distintas se separan de forma exponencial.

Lo contrario ocurre con la ecuación

$$y' = -y.$$

Si de nuevo $y_1(t)$ e $y_2(t)$ son dos soluciones distintas se verifica que

$$\begin{aligned} \lim_{t\to+\infty} |y_2(t) - y_1(t)| &= \lim_{t\to+\infty} |y_2(t_0)e^{-t+t_0} - y_1(t_0)e^{-t+t_0}| \\ &= \lim_{t\to+\infty} |y_2(t_0) - y_1(t_0)|e^{-t+t_0} = 0, \end{aligned}$$

y por tanto toda solución del sistema es asintóticamente estable.

No es posible dar un ejemplo de ecuación estable y no asintóticamente estable, por lo que para dar un ejemplo de este hecho hemos de partir de un sistema plano. En particular, consideramos

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x, \end{cases}$$

y veamos que sus soluciones son circunferencias concéntricas con centro $(0,0)$. Si fijamos una condición incial $x(0) = x_0$ y $y(0) = y_0$ y resolvemos el sistema tenemos que

$$\begin{cases} \mathcal{L}[x'](z) = \mathcal{L}[y](z), \\ \mathcal{L}[y'](z) = -\mathcal{L}[x](z), \end{cases}$$

de donde

$$\begin{cases} z\mathcal{L}[x](z) - x_0 = \mathcal{L}[y](z), \\ z\mathcal{L}[y](z) - y_0 = -\mathcal{L}[x](z). \end{cases}$$

Sustituyendo $\mathcal{L}[y](z)$ en la segunda ecuación y simplificando obtenemos

$$(z^2+1)\mathcal{L}[x](z) = zx_0 + y_0$$

de donde

$$\mathcal{L}[x](z) = \frac{zx_0 + y_0}{z^2+1},$$

y calculado la transformada de Laplace inversa

$$x(t) = x_0 \cos t + y_0 \sin t,$$

y por lo tanto

$$y(t) = -x_0 \sin t + y_0 \cos t.$$

Calculando

$$x(t)^2 + y(t)^2 = (x_0 \cos t + y_0 \sin t)^2 + (-x_0 \sin t + y_0 \cos t)^2 = x_0^2 + y_0^2,$$

por lo que efectivamente las soluciones son circunferencias concéntricas. Además, si ponemos (x_0, y_0) en coordenadas polares

$$\begin{cases} x_0 = r_0 \cos\theta_0, \\ y_0 = r_0 \sin\theta_0, \end{cases}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos t + y_0 \sin t \\ &= r_0 \cos\theta_0 \cos t + r_0 \sin\theta_0 \sin t \\ &= r_0 \cos(t - \theta_0) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y(t) &= -x_0 \sin t + y_0 \cos t \\ &= -r_0 \cos\theta_0 \sin t + r_0 \sin\theta_0 \cos t \\ &= r_0 \sin(t - \theta_0) \end{aligned}$$

por lo que todas las soluciones se recorren a la misma velocidad dependiente de t. Por lo tanto, dadas dos soluciones distintas $(x_1(t), y_1(t))$ y $(x_2(t), y_2(t))$ se verifica que

$$\|(x_1(t), y_1(t)) - (x_2(t), y_2(t))\| = \sqrt{(x_2(0) - x_1(0))^2 + (y_2(0) - y_1(0))^2}.$$

Entonces la distancia entre dos soluciones permance constante y todas las soluciones son estables, aunque no pueden ser asintóticamente estables.

1.7. Estabilidad de sistemas lineales

Consideremos ahora un sistema lineal $\mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}$ donde la matriz $\mathbf{A}$ tiene n filas y columnas. Aunque en este caso no disponemos de la representación de los diagramas de fases del mismo, sí que es posible determinar la estabilidad del mismo, con un resultado análogo al anterior. Para establecer el mismo, dada la matriz $\mathbf{A}$, denotaremos por $\lambda_1, ..., \lambda_k$ los valores propios de $\mathbf{A}$ con multiplicidades $m_1, ..., m_k$. Asímismo, denotaremos por $d_1, ..., d_k$ las dimensiones sobre $\mathbb{C}$ de los subespacios propios $\operatorname{Ker}(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}_n), ..., \operatorname{Ker}(\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{I}_n)$.

Teorema 5 *Sea el sistema lineal plano* $\mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}$, $\mathbf{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *no nula. Entonces*

(a) El sistema es asintóticamente estable si $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ *para todo* $i = 1, ..., k$.

(b) El sistema es estable si $\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0$, $1 \leq i \leq k$, *y además si* λ_i *verifica que* $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$, *entonces* $d_i = m_i$.

(c) El sistema es inestable si o bien existe λ_i *tal que* $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$ *y* $m_i > d_i$, *o bien existe* λ_i *tal que* $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$.

Vamos a ver cómo obtener una justificación de este resultado, que al menos en cuanto a los valores propios con parte real no nula es completa. Del sistema homogéneo tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\mathbf{y}](z) &= -(\mathbf{A} - z \cdot \mathbf{I}_n)^{-1} \cdot \mathbf{y}(0) \\ &= \frac{-1}{p(z)} (\mathbf{A} - z \cdot \mathbf{I}_n)^t \cdot \mathbf{y}(0), \end{aligned}$$

donde

$$p(z) = |\mathbf{A} - z \cdot \mathbf{I}_n|$$

es el polinomio característico de A. Por construcción

$$(adj(\mathbf{A} - z \cdot \mathbf{I}_n)^t = (p_{ij}(z)),$$

donde $p_{ij}(z)$ es un polinomio con grado a lo sumo $n - 1$. Por tanto

$$\mathcal{L}[\mathbf{y}](z) = \begin{pmatrix} \frac{p_i(z)}{p(z)} \end{pmatrix}$$

y por tanto si $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), ..., y_n(t))^t$, se tiene que

$$y_i(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p_i(z)}{p(z)}\right](t) = \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Re}s\left(e^{zt}\frac{p_i(z)}{p(z)}, \lambda_j\right)$$

donde $\lambda_1, ..., \lambda_k$ son los valores propios de la matriz $\mathbf{A}$ con multiplicidades $m_1, ..., m_k$. Existirán naturales $l_j \leq m_j$ tales que

$$\operatorname{Re}s\left(e^{zt}\frac{p_i(z)}{p(z)}, \lambda_j\right) = \frac{1}{(l_j-1)!}\lim_{z\to z_j}\frac{d^{l_j-1}}{dz^{l_j-1}}\left(e^{zt}\frac{p_i(z)(z-\lambda_j)^{l_j}}{p(z)}\right) = q_j(t)e^{\lambda_j t},$$

donde $q_j(t)$ es un polinomio de grado a lo sumo l_j. Como

$$\lim_{t\to\infty} q_j(t)e^{\lambda_j t} = 0$$

si $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$, se prueba el apartado (a). Como $q_j(t)e^{\lambda_j t}$ es no acotado si $\operatorname{Re}\lambda_j > 0$, la existencia de un valor propio con parte real positiva implica inestabilidad. En el caso de tener valores propios con parte real nula, el polinomio $q_j(t)$ tendrá grado cero, es decir, será una constante si y solo si $m_j = d_j$ (la prueba de este hecho requiere conocimientos de álgebra lineal que el alumno no posee). En ese caso $|e^{\lambda_j t}| = 1$ y por tanto el sistema será estable, mientras que si el grado de $q_j(t)$ es mayor que cero, $q_j(t)e^{\lambda_j t}$ será no acotado, implicando inestabilidad.

Ejemplo 1 Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = -3x + 2y + 2z, \\ y' = -2x + y + 2z, \\ z' = -2x + 2y + z. \end{cases}$$

Es fácil ver que 1 y -1 son los valores propios de la matriz asociada al sistema, por lo que en virtud del Teorema 5 (c), éste es inestable. ■

Ejemplo 2 Sea ahora el sistema

$$\begin{cases} x' = -2x + y - z, \\ y' = x - 2y - z, \\ z' = -x + y - 2z. \end{cases}$$

Podemos ver ahora que los valores propios de la matriz asociada son -1, -2 y -3, por lo que por el Teorema 5 (b), el sistema es asintóticamente estable. ■

Ejemplo 3 Sea el sistema

$$\begin{cases} x' = -4x + y + 3z, \\ y' = 2z, \\ z' = -2y. \end{cases}$$

Puede comprobarse que $\pm 2i$ y -4 son los valores propios de la matriz del sistema. Cómo las dimensiones de los subespacios propios de los valores propios $\pm i$ son 1 y coincide con la multiplicidad de éstos, por el Teorema 5 (a) y (b) el sistema será estable, aunque no será asintóticamente estable. ■

La aplicación del Teorema 5 tiene a priori un punto flaco puesto de manifiesto por el siguiente ejemplo. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = -2x + y - 2z, \\ y' = 3x - 9y, \\ z' = 4x + y + z. \end{cases}$$

Este sistema coincide con el del apartado (d) del ejercicio anterior en todos los coeficientes de la matriz asociada excepto el primero. El polinomio característico es $p(\lambda) = -\lambda^3 - 10\lambda^2 - 12\lambda - 63$, pero resolver la ecuación $p(\lambda) = 0$ no resulta sencillo, y quizás ni siquiera factible para los conocimientos de los que se disponen. Ahora bien, para aplicar el Teorema 5 en la mayoría de los casos sólo necesitamos conocer los signos de las partes reales de los valores propios de la matriz asociada. Para este objetivo podemos usar el siguiente criterio de Routh-Hurwitz que, aunque no siempre es aplicable, supone una gran ayuda para determinar al menos si el sistema es asintóticamente estable.

Proposición 1 *Sea $p(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n)$ el polinomio característico de la matriz $\mathbf{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Las raíces de $p(\lambda)$ tienen parte real negativa si y sólo son estrictamente positivos los menores principales de la matriz*

$$\mathbf{H_A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & ... & 0 \\ 1 & a_2 & a_4 & ... & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & ... & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & a_n \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 4 Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = -3x + y + z, \\ y' = x - 4y + z, \\ z' = -2y - 3z. \end{cases}$$

El polinomio característico de la matriz asociada es $p(\lambda) = -41 - 34x - 10x^2 - x^3$ y la matriz $\mathbf{H_A}$

$$\begin{pmatrix} 10 & 41 & 0 \\ 1 & 34 & 0 \\ 0 & 10 & 41 \end{pmatrix}$$

cuyos menores principales son 10, 299 y 12259. Está claro entonces que todos los valores propios de la matriz $\mathbf{A}$ tienen parte real negativa, por lo que el sistema será asintóticamente estable. ■

Además puede ser de utilidad el siguiente resultado que denominaremos *Teorema de círculo de Gershgorin.*

Teorema 6 *Sea $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ con valores propios $\lambda_1, ..., \lambda_r$. Entonces todos los valores propios están en el conjunto del plano de la forma*

$$\{x + iy \in \mathbb{C} : \sqrt{(x - a_{11})^2 + y^2} < r_1\} \cup ... \cup \{x + iy \in \mathbb{C} : \sqrt{(x - a_{nn})^2 + y^2} < r_n\},$$

donde $r_k = \sum_{j=1}^n |a_{ij}| - |a_{ii}|$, $k = 1, 2, ..., n$.

Demostración. Si λ es valor propio de $\mathbf{A}$ con vector propio $\mathbf{v} = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{C}^n$ y $s = \max\{|v_i| : i = 1, ..., n\}$. Definimos

$$\mathbf{u}=\frac{1}{s} \cdot \mathbf{v} = (u_1, ..., u_n),$$

que también es vector propio de λ tal que $\max\{|u_i| : i = 1, ..., n\} = |u_{i_o}| = 1$. Entonces

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} u_j = \lambda u_{i_0},$$

con lo que

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i_0}}^{n} a_{i_0 j} u_j = (\lambda - a_{i_0 i_0}) u_{i_0}.$$

Así

$$|\lambda - a_{i_0 i_0}| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i_0}}^{n} a_{i_0 j} u_j \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i_0}}^{n} |a_{i_0 j}||u_j| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i_0}}^{n} |a_{i_0 j}| = r_{i_0},$$

con lo que el resultado queda probado. ■

Vemos cómo se aplica este resultado en el siguiente ejemplo.

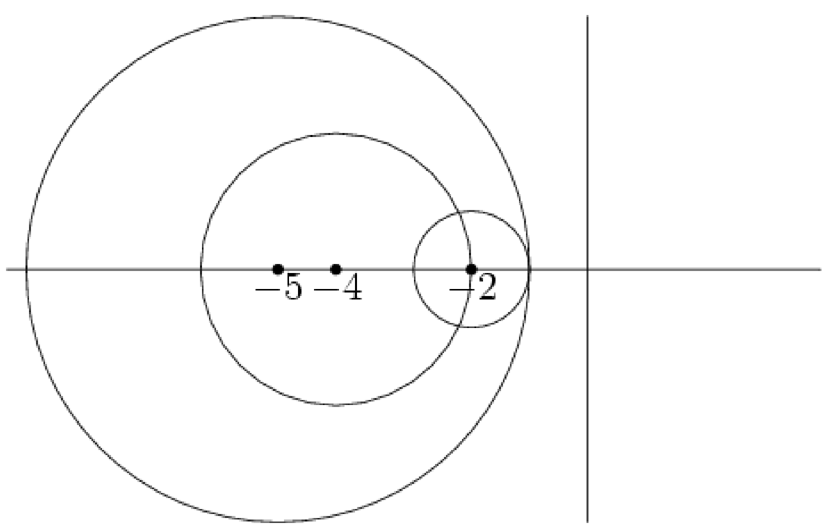
Ejemplo 5 Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = -4x + y + z, \\ y' = -2y + z, \\ z' = 4y - 5z. \end{cases}$$

El conjunto a que hace referencia el resultado anterior es

$$\{(x, y) : \sqrt{(x + 4)^2 + y^2} < 2\} \cup \{(x, y) : \sqrt{(x + 2)^2 + y^2} < 1\}\{(x, y) : \sqrt{(x + 5)^2 + y^2} < 4\},$$

que gráficamente representamos por



por lo que todos los valores propios tienen parte real negativa y el sistema es por tanto asitóticamente estable. ■

Ejercicio 1 *Determinar si es posible la estabilidad asintótica de los siguientes sistemas*

$$(a)\left\{\begin{array}{l} x' = -\frac{1}{2}x, \\ y' = \frac{1}{2}x - y - \frac{1}{2}z, \\ z' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - z. \end{array}\right. \quad (b)\left\{\begin{array}{l} x' = -3x - y + z, \\ y' = x - 5y - z, \\ z' = 2x - 2y - 4z. \end{array}\right. \quad (c)\left\{\begin{array}{l} x' = -\frac{5}{12}x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z, \\ y' = \frac{5}{12}x - \frac{13}{12}y - \frac{5}{12}z, \\ z' = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{5}{6}z. \end{array}\right.$$

1.8. ¿Por qué un sistema estable es útil en ingeniería?

Supongamos que tenemos un sistema de ecuaciones diferenciales lineales no autónomo

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{f}(t),$$

donde $\mathbf{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ y supongamos que el sistema autónomo asociado

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}$$

es asintóticamente estable. Entonces toda solución del sistema autónomo

$$\mathbf{y}_h(t) = e^{\mathbf{A}\cdot t} \cdot \mathbf{C},\ \mathbf{C} \in \mathbb{R}^n$$

verifica que

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{y}_h(t) = \mathbf{0}.$$

Ahora bien, toda solución del sistema no autónomo es de la forma

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_h(t) + \mathbf{y}_p(t) \tag{1.11}$$

donde $\mathbf{y}_p(t)$ es una solución particular del sistema no homogéneo. Si tomamos límites cuando t tiende a infinito, tenemos que

$$\mathbf{y}(t) \simeq \mathbf{y}_p(t),$$

es decir, para tiempos grandes (aquí lo de grande depende de cada sistema) la solución del sistema no autónomo es básicamente la solución particular del mismo y la parte de la solución correspondiente al sistema homogéneo se va reduciendo con el tiempo. En ingeniería a la función $\mathbf{f}(t)$ se le llama entrada del sistema e $\mathbf{y}_p(t)$ es la salida del mismo. Si el sistema es estable, al variar la entrada, varía la salida sin que la parte homogénea intervenga en el proceso. Esto es lo que ocurre en la mayoría de los sistemas lineales utilizados en las ciencias experimentales, como en circuitos eléctricos o vibraciones mecánicas.

Cuando tenemos un problema de condiciones iniciales

$$\left\{\begin{array}{c} \mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{f}(t), \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \end{array}\right.$$

la solución tendrá la forma

$$\mathbf{y}(t) = e^{\mathbf{A}\cdot t} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{y}_p(t)$$

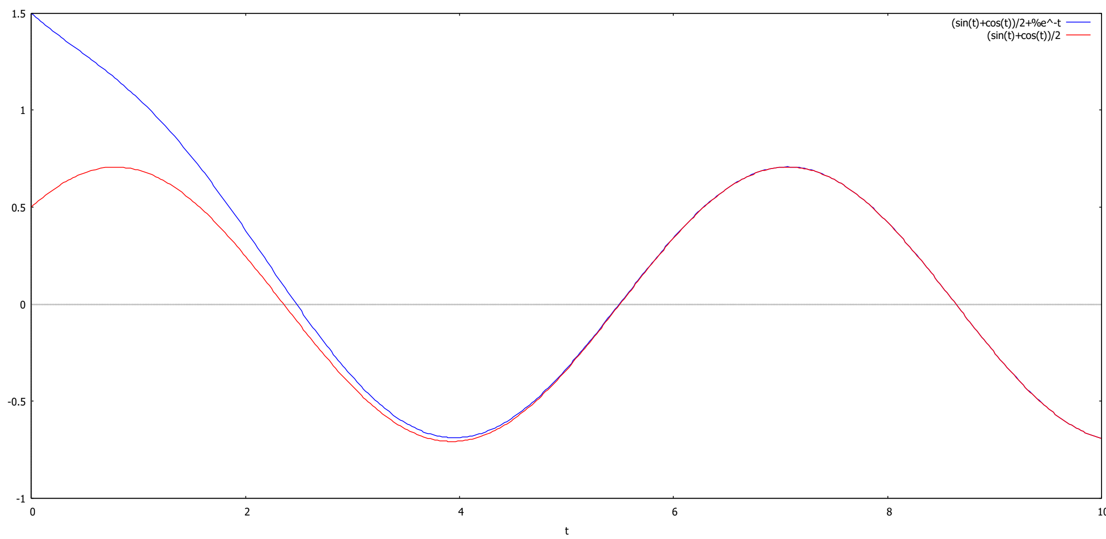
donde $\mathbf{C}$ depende de las condiciones iniciales e $\mathbf{y}_p(t)$ no. Llamaremos solución en el régimen transitorio a $\mathbf{y}(t)$, mientras que $\mathbf{y}_p(t)$ será la solución en el régimen permanente, una vez que $e^{\mathbf{A}\cdot t}\cdot\mathbf{C}$ de un valor que puede considerarse nulo. Por ejemplo, el problema

$$\begin{cases} y' = -y + \cos t \\ \mathbf{y}(0) = 3/2, \end{cases}$$

verifica que $y' = -y$ es asintóticamente estable y tiene por solución

$$y(t) = e^{-t} + \frac{1}{2}(\cos t + \sin t).$$

Como puede verse en la figura, donde se han representado conjuntamente $y(t)$ e $y_p(t) = \frac{1}{2}(\cos t + \sin t)$, ambas soluciones convergen cuando el tiempo es suficientemente grande.



1.9. Funciones de transferencia. Estabilidad y control de sistemas lineales

Supongamos un sistema dado por la ecuación

$$y^{n)} + a_{n-1}y^{n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(t), \tag{1.12}$$

donde $a_i \in \mathbb{R}$ para $0 \leq i \leq n$. f es una señal entrada del sistema e y es la respuesta que produce en sistema a la excitación que f representa. El cambio de variable

$$y_1 = y, y_2 = y', \ldots y_{n-1} = y^{n-2)}, y_n = y^{n-1)}$$

transforma la ecuación en el sistema

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ \ldots\ldots\ldots \\ y_{n-1}' = y_n, \\ y_n' = f(t) - a_0 y_1 - a_1 y_2 - \ldots - a_{n-2} y_{n-1} - a_{n-1} y_n, \end{cases}$$

que en forma matricial es

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ ... \\ y_{n-1}' \\ y_n' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & ... & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Su polinomio característico es

$$\begin{aligned}
P(t) &= \begin{vmatrix} -t & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & -t & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & -t & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & ... & -a_{n-2} & -a_{n-1}-t \end{vmatrix} \\
&= -a_0(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ -t & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & -t & 1 \end{vmatrix} - t \begin{vmatrix} -t & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & -t & 1 \\ -a_1 & -a_2 & ... & -a_{n-2} & -a_{n-1}-t \end{vmatrix} \\
&= a_0(-1)^n - t \left(-a_1(-1)^n \begin{vmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ -t & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & -t & 1 \end{vmatrix} - t \begin{vmatrix} -t & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & -t & 1 \\ -a_2 & -a_3 & ... & -a_{n-2} & -a_{n-1}-t \end{vmatrix} \right) \\
&= (-1)^n (a_0 + a_1 t) + t^2 \begin{vmatrix} -t & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & -t & 1 \\ -a_2 & -a_3 & ... & -a_{n-2} & -a_{n-1}-t \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Repitiendo el proceso y teniendo en cuenta que $(-1)^n = (-1)^{n-2} = (-1)^{n-4} = ...$ tenemos que

$$\begin{aligned}
P(t) &= (-1)^n \left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... + a_{n-3} t^{n-3}\right) + (-1)^{n-2} t^{n-2} \begin{vmatrix} -t & 1 \\ -a_{n-2} & -a_{n-1}-t \end{vmatrix} \\
&= (-1)^n \left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... + a_{n-3} t^{n-3}\right) + (-1)^{n-2} t^{n-2} \left(t^2 + a_{n-1} t + a_{n-2}\right) \\
&= (-1)^n \left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... + a_{n-3} t^{n-3} + a_{n-2} t^{n-2} + a_{n-1} t^{n-1} + t^n\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, los valores propios de $\mathbf{A}$ son las soluciones de la ecuación característica

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... + a_{n-3} t^{n-3} + a_{n-2} t^{n-2} + a_{n-1} t^{n-1} + t^n = 0.$$

Además, si λ es solución, su subespacio propio se calcula a partir de la matriz

$$\mathbf{A}-\lambda\cdot\mathbf{I}_n=\left(\begin{array}{cccccc} -\lambda & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & ... & -a_{n-2} & -a_{n-1}-\lambda \end{array}\right)$$

que tiene las $n-1$ primeras filas linealmente independientes. Por tanto su rango es $n-1$ y el sunespacio propio asociado $\operatorname{Ker}(\mathbf{A}-\lambda\cdot\mathbf{I}_n)$ tiene dimensión 1 y por tanto el teorema de estabilidad para este tipo de sistemas es de la siguiente forma.

Teorema 7 *Sea* $p(z)=(-1)^n\prod_{i=1}^r(z-\lambda_i)^{n_i}$, $\sum_{i=1}^r n_i=n$. *Entonces el sistema (1.12) es*

(a) Asintóticamente estable si $\operatorname{Re}\lambda_i<0$ *para todo* $i=1,2,...,r$.

(b) Estable si $\operatorname{Re}\lambda_i\leq 0$ *y* $\operatorname{Re}\lambda_i=0$ *implica que la multiplicidad de* λ_i *es* 1.

(c) Inestable si no se cumplen algunas de las condiciones (a) o (b) anteriores.

Aplicando formalmente la transformada de Laplace a (1.12) con todas las condiciones iniciales nulas obtenemos

$$p(z)\mathcal{L}[y](z)=\mathcal{L}[f](z),$$

donde $p(z)$ es un polinomio de grado n. La *función de transferencia del sistema*, se define como

$$T(z)=\frac{\mathcal{L}[y](z)}{\mathcal{L}[f](z)}=\frac{1}{p(z)}.$$

La estabilidad del sistema puede entonces estudiarse a partir de los polos de la función de transferencia.

1.9.1. Respuesta a una señal constante

Supongamos un sistema asintóticamente estable con función de transferencia $T(z)$ de manera que es estimulado por una función constante de la forma

$$f(t)=K.$$

Como sabemos la transformada de Laplace de dicha señal será de la forma

$$F(z)=\frac{K}{z}$$

y la respuesta a largo tiempo del sistema $y(t)$ vendrá dada por la expresión

$$Y(z)=T(z)F(z).$$

Ahora bien, dicha respuesta se calculará como

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[T(z)F(z)](t),$$

y dado que el sistema era asintóticamente estable, se tiene que los polos de la función de transferencia tienen parte real negativa, por lo que ninguno de ellos coincidirá con el polo de $F(z)$ que es 0. En el cálculo de la transformada inversa, los polos de la función de transferencia dan lugar a términos que aparecen multiplicados por factores de la forma e^{-ta}, con $a > 0$, y que tienden a cero muy rápidamente cuando $t \to +\infty$. Por ello, al calcular la transformada inversa para tiempo suficientemente grande basta con tomar el polo 0, es decir, podemos asumir que

$$y(t) = \operatorname{Res}\left(e^{zt}T(z)\frac{K}{z}, 0\right) = T(0)K.$$

1.9.2. Respuesta a una señal sinusuidal

Supongamos un sistema asintóticamente estable con función de transferencia $T(z)$ de manera que es estimulado por una función de tipo seno de la forma

$$f(t) = A\sin(\omega t + \phi),$$

donde $A > 0$ es la amplitud, ω es la frecuencia y ϕ es la fase inicial. Como sabemos, el seno es una función 2π periódica, por lo que

$$\sin(\omega t + \phi) = \sin(\omega t + \phi + 2\pi) = \sin(\omega(t + 2\pi/\omega) + \phi),$$

por lo que $T = 2\pi/\omega$ se llama periodo de la señal, es decir la frecuencia $\omega = 2\pi/T$. Como sabemos, si la fase inicial $\phi = 0$, la transformada de Laplace de dicha señal será de la forma

$$F(z) = \frac{A\omega}{z^2 + \omega^2},$$

y la respuesta a largo tiempo del sistema $y(t)$ vendrá dada por la expresión

$$Y(z) = T(z)F(z).$$

Ahora bien, dicha respuesta se calculará como

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[T(z)F(z)](t),$$

y dado que el sistema era asintóticamente estable, se tiene que los polos de la función de transferencia tienen parte real negativa, por lo que ninguno de ellos coincidirá con los polos de $Y(z)$ que son $\pm i\omega$. En el cálculo de la transformada inversa, los polos de la función de transferencia dan lugar a términos que aparecen multiplicados por factores de la forma e^{-ta}, con $a > 0$, y que tienden a cero muy rápidamente cuando $t \to +\infty$. Por ello, al calcular la transformada inversa para tiempo suficientemente grande basta con tomar los polos $\pm i\omega$, es decir, podemos asumir que

$$\begin{aligned} y(t) &= \operatorname{Res}\left(e^{zt}T(z)\frac{A\omega(z - i\omega)}{z^2 + \omega^2}, i\omega\right) + \operatorname{Res}\left(e^{zt}T(z)\frac{A\omega(z + i\omega)}{z^2 + \omega^2}, -i\omega\right) \\ &= T(i\omega)\frac{Ae^{ti\omega}}{2i} - T(-i\omega)\frac{Ae^{-ti\omega}}{2i}. \end{aligned}$$

Tomando la forma polar de $T(i\omega)$ y $T(-i\omega)$, y teniendo en cuenta que los coeficientes del sistema son reales obtenemos que

$$T(i\omega) = |T(i\omega)|e^{i\arg T(i\omega)},$$

y

$$T(-i\omega) = |T(-i\omega)|e^{i\arg T(-i\omega)} = |T(i\omega)|e^{-i\arg T(i\omega)}.$$

Sustituyendo en la relación anterior

$$\begin{aligned} y(t) &= T(i\omega)\frac{Ae^{ti\omega}}{2i} - T(-i\omega)\frac{Ae^{-ti\omega}}{2i} \\ &= |T(i\omega)|e^{i\arg T(i\omega)}\frac{Ae^{ti\omega}}{2i} - |T(i\omega)|e^{-i\arg T(i\omega)}\frac{Ae^{-ti\omega}}{2i} \\ &= A|T(i\omega)|\frac{e^{i(t\omega+\arg T(i\omega))} - e^{-i(t\omega+\arg T(i\omega))}}{2i} \\ &= A|T(i\omega)|\sin(t\omega + \arg T(i\omega)). \end{aligned}$$

El término $|T(i\omega)|$ mide si la respuesta amplifica o atenua la señal, mientras que $\arg T(i\omega)$ representa un variación de la fase respecto de la incial. Asímismo, $T(i\omega)$ puede ser determinado experimentalmente introduciendo una señal sinusuidal.

Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6 *Dado el sistema*

$$\begin{cases} y''' + 7y'' + 19y' + 13y = f(t), \\ y(0) = y'(0) = 0, \; y''(0) = 1, \end{cases}$$

se pide:

(a) Demostrar que es asintóticamente estable.

(b) Obtener la solución cuando el tiempo es suficientemente grande (régimen estacionario) cuando $f(t) = 10$.

(c) Obtener la solución cuando el tiempo es suficientemente grande (régimen estacionario) cuando $f(t) = 10\sin(4t)$.

(d) Obtener la solución $y(t)$ cuando $f(t) = h_2(t)$, la función de Heaviside, y calcular $\lim_{t\to\infty} y(t)$.

Si aplicamos la transformada de Lapace obtenemos

$$(z^3 + 7z^2 + 19z + 13)\mathcal{L}[y](z) - 1 = \mathcal{L}[f](z),$$

de donde

$$\mathcal{L}[y](z) = \frac{1}{z^3 + 7z^2 + 19z + 13} + \frac{\mathcal{L}[f](z)}{z^3 + 7z^2 + 19z + 13}$$

con lo que la función de transferencia es

$$T(z) = \frac{1}{z^3 + 7z^2 + 19z + 13},$$

cuyos polos son -1, $-3 \pm 2i$, que tienen todos parte real negativa, por lo que es sistema es asintóticamente estable y resolvemos (a).

(b) En este caso

$$\mathcal{L}[f](z) = \frac{10}{z}$$

y la solución es

$$\begin{aligned} y(t) &\simeq Res\left(e^{zt}\frac{10}{z}T(z), 0\right) \\ &= \lim_{z\to 0} 10e^{zt}T(z) \\ &= 10T(0) = \frac{10}{13}. \end{aligned}$$

(c) En este caso, tenemos que

$$\begin{aligned} y(t) &\simeq 10|T(4i)|\sin\left(4t + \arg(T(4i))\right) \\ &= \frac{10}{3\sqrt{1105}}\sin\left(4t + \arctan\left(\frac{4}{33}\right) - \pi\right) \end{aligned}$$

ya que

$$\begin{aligned} T(4i) &= -\frac{11}{1105} - \frac{4}{3315}i, \\ |T(4i)| &= \frac{1}{3\sqrt{1105}}, \\ \arg(T(4i)) &= \arctan\left(\frac{4}{33}\right) - \pi. \end{aligned}$$

(d) Finalmente, dado que

$$\mathcal{L}[h_2](z) = \frac{e^{-2z}}{z},$$

se tiene que

$$\mathcal{L}[y](z) = \frac{1}{z^3 + 7z^2 + 19z + 13} + \frac{e^{-2z}}{(z^3 + 7z^2 + 19z + 13)z},$$

por lo que

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^3 + 7z^2 + 19z + 13}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2z}}{(z^3 + 7z^2 + 19z + 13)z}\right](t) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^3 + 7z^2 + 19z + 13}\right](t) + h_2(t)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(z^3 + 7z^2 + 19z + 13)z}\right](t-2). \end{aligned}$$

Calculamos aparte

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^3+7z^2+19z+13}\right](t) &= Res\left(e^{zt}T(z),-1\right)+Res\left(e^{zt}T(z),-3+2i\right)\\
&\quad +Res\left(e^{zt}T(z),-3-2i\right)\\
&= \frac{e^{-t}}{8}-\frac{e^{-3t}}{8}\left(\cos(2t)+\sin(2t)\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(z^3+5z^2+11z+15)z}\right](t) &= Res\left(e^{zt}T(z),-0\right)+Res\left(e^{zt}T(z),-3\right)\\
&\quad +Res\left(e^{zt}T(z),-1+2i\right)+Res\left(e^{zt}T(z),-1-2i\right)\\
&= \frac{1}{13}-\frac{e^{-t}}{8}+\frac{e^{-3t}}{104}\left(\cos(2t)+5\sin(2t)\right).
\end{aligned}$$

Así

$$y(t)=\frac{e^{-t}}{8}-\frac{e^{-3t}}{8}\left(\cos(2t)+\sin(2t)\right)+h_2(t)\left(\frac{1}{13}-\frac{e^{-t+2}}{8}+\frac{e^{-3t+6}}{104}\left(\cos(2t-4)+5\sin(2t-4)\right)\right)$$

1.9.3. Respuesta a una señal periódica

Supongamos una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes con función de transferencia $T(z)$. Supongamos que el sistema es asintóticamente estable, de tal manera que si $f(t)=A\sin(\omega t+\phi)$ es la entrada del sistema, se verifica que su salida para tiempos suficientemente grandes viene dada por

$$x(t)=A|T(i\omega)|\sin(\omega t+\phi+\arg T(i\omega)).$$

Supongamos ahora que la señal es periódica de periodo $2L$. Dicha función puede expresarse en su serie de Fourier

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right)\right)\\
&= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(n\omega t)+b_n\sin(n\omega t)\right),
\end{aligned}$$

donde $\omega=\pi/L$. Por otra parte, si escribimos (b_n,a_n) en coordenadas polares mediante la expresión

$$\left\{\begin{array}{l} b_n=A_n\cos\phi_n,\\ a_n=A_n\sin\phi_n,\end{array}\right.$$

podemos reescribir la expresión anterior como

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \sin\phi_n \cos(n\omega t) + A_n \cos\phi_n \sin(n\omega t) \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \phi_n). \end{aligned}$$

Si ahora $f(t)$ es la entrada al sistema anterior, entonces su salida para tiempos suficientemente grandes vendrá dada por

$$x(t) = \frac{a_0}{2} T(0) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n |T(in\omega)| \sin(n\omega t + \phi_n + \arg T(in\omega)).$$

Dado que para casos prácticos $\lim_{t\to\infty} |T(it)| = 0$, por lo que $\lim_{n\to\infty} |T(in\omega)| = 0$, como consecuencia la series de Fourier de $x(t)$ converge a cero más rápidamente que la serie de Fourier de la señal inicial $f(t)$.

Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7 *Dado el sistema*

$$\left\{ \begin{array}{c} y''' + 7y'' + 19y' + 13y = f(t), \\ y(0) = y'(0) = 0, \ y''(0) = 1. \end{array} \right.$$

Demostrar que es asintóticamente estable y calcular su solución para tiempos suficientemente grandes cuando $f(t)$ es la función 2-periódica definida en $[-1,1]$ como

$$f(t) = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & si & t \in [-1,0), \\ t & si & t \in [0,1). \end{array} \right.$$

Como sabemos del ejemplo 6 el sistema es asintóticamente estable. El desarrollo en serie de Fourier de $f(t)$ es

$$\begin{aligned} Sf(t) &= \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2} \cos(n\pi t) - \frac{1}{n\pi} \sin(n\pi t) \right) \\ &= \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n^2\pi^2} + \frac{(1-(-1)^n)^2}{n^4\pi^4}} \sin\left(n\pi t + \arctan \frac{(-1)^n - 1}{n\pi} \right). \end{aligned}$$

La función de transferencia es

$$T(z) = \frac{1}{z^3 + 7z^2 + 19z + 13}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{4}T(0) + \sum_{n=1}^{\infty} |T(in\pi)| \sqrt{\frac{1}{n^2\pi^2} + \frac{(1-(-1)^n)^2}{n^4\pi^4}} \sin\left(n\pi t + \arctan\frac{(-1)^n - 1}{n\pi}\right) \\ &= \frac{1}{52} + \sum_{n=1}^{\infty} |T(in\pi)| \sqrt{\frac{1}{n^2\pi^2} + \frac{(1-(-1)^n)^2}{n^4\pi^4}} \sin\left(n\pi t + \arctan\frac{(-1)^n - 1}{n\pi}\right) \end{aligned}$$

donde

$$|T(in\pi)| = \frac{1}{\sqrt{(19n\pi - n^3\pi^3)^2 + (13 - 7n^2\pi^2)^2}}.$$

1.10. Estabilidad local de sistemas autónomos

Consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$$

donde $\mathbf{f} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ es una función con regularidad suficiente para satisfacer la unicidad de soluciones para un problema de condiciones iniciales o de Cauchy. Si la variable independiente t no aparece explícitamente en las ecuaciones del sistema, es decir, el sistema es de la forma

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$$

donde $\mathbf{f} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, se dice que el sistema de ecuaciones es autónomo. Por ejemplo, el sistema

$$\begin{cases} x' = y - x + t, \\ y' = xy, \end{cases}$$

es no autónomo mientras que

$$\begin{cases} x' = y - x, \\ y' = xy, \end{cases} \tag{1.13}$$

o

$$y' = 4y(1 - y) \tag{1.14}$$

son autónomos.

Aunque estos sistemas pueden no ser fáciles de resolver, es sencillo encontrar determinadas soluciones particulares. Entre ellas destacan las soluciones constantes, cuyascondiciones iniciales vienen dadas por las soluciones del sistema algebraico

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}.$$

Si $\mathbf{y}_0 \in \Omega$ y verifica que

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}_0) = \mathbf{0},$$

entonces la solución constante de la forma

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0,$$

es la única solución del problema de condiciones inciales

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}), \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \end{cases}$$

para todo $t_0 \in \mathbb{R}$. Así, resolviendo el sistema

$$\begin{cases} y - x = 0, \\ xy = 0, \end{cases}$$

vemos que $(0,0)$ es el único punto crítico del sistema (1.13), mientras que al resolver la ecuación

$$4y(1-y) = 0$$

comprobamos que 0 y 1 son los puntos críticos de la ecuación (1.14).

1.10.1. Método de linealización de Lyapunov. Teorema de Hartman–Grobman

Analizaremos a continuación la estabilidad de puntos críticos de sistemas autónomos mediante un método que es comúnmente usado en las ciencias experimentales, el método de linealización. Supongamos un sistema autónomo

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}) \tag{1.15}$$

con $\mathbf{f}$ definido sobre el abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ y sea $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ un punto crítico aislado del mismo (un punto crítico es aislado si existe $\varepsilon > 0$ tal que la bola abierta de centro $\mathbf{y}_0$ y radio ε no contiene puntos críticos aparte de $\mathbf{y}_0$). Consideremos el sistema linealizado dado por

$$\mathbf{y}' = \mathrm{J}\mathbf{f}(\mathbf{y}_0) \cdot \mathbf{y}, \tag{1.16}$$

donde $\mathrm{J}\mathbf{f}(\mathbf{y}_0)$ es la matriz Jacobiana de $\mathbf{f}$ en el punto $\mathbf{y}_0$. Por ejemplo consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = x^2 + 2x + y^2, \\ y' = -2x^3 + 2y. \end{cases}$$

Es evidente que $(0,0)$ es un punto crítico del sistema. La matriz Jacobiana en $(0,0)$ es

$$\mathrm{J}\mathbf{f}(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

y el sistema linealizado será

$$\begin{cases} x' = 2x, \\ y' = 2y. \end{cases}$$

Es de esperar que localmente (cerca del punto crítico $\mathbf{y}_0$), el comportamiento asintótico de los sistemas (1.15) y (1.16) sea parecido. Este parecido se precisará con el *Teorema de Hartman–Grobman*, para cuya compresión necesitaremos algunas definiciones previas.

En primer lugar necesitamos una herramienta para comparar localmente sistemas autónomos. Esta herramienta es la *conjugación topológica* [Jim, pag. 239]. Los sistemas (1.15) y (1.16) se dice topológicamente conjugados si existe una aplicación continua, biyectiva con inversa continua $\mathbf{h} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ verificando la condición $\mathbf{h}(\mathbf{y}(t, \mathbf{y}_0)) = \mathbf{z}(t, \mathbf{h}(\mathbf{y}_0))$ para todo $\mathbf{y}_0 \in \Omega$ [aquí $\mathbf{z}(t, \mathbf{h}(\mathbf{y}_0))$ representa la solución maximal de (1.16) con condición inicial $\mathbf{h}(\mathbf{y}_0)$]. Si existen abiertos de $\mathbb{R}^n$ U y V de manera que son topológicamente conjugados los sistemas restringidos a estos abiertos, entonces los sistemas (1.15) y (1.16) se dirán *localmente topológicamente conjugados.* Para entendernos, una conjugación topológica lleva órbitas de un sistema en órbitas del otro sistema, preservando la orientación temporal.

La segunda definición que interviene en el enunciado del Teorema de Hartman–Grobman es el de *punto crítico hiperbólico.* Con la notación anterior $\mathbf{y}_0$ se dice hiperbólico si los valores propios de la matriz Jacobiana $\mathrm{J}\mathbf{f}(\mathbf{y}_0)$ tienen parte real no nula. En caso contrario $\mathbf{y}_0$ se dirá no hiperbólico. En el ejemplo anterior, el valor propio de la matriz Jacobiana es 2 con multiplicidad 2, por lo que $(0, 0)$ es un punto crítico hiperbólico.

Teorema 8 ***(Hartman–Grobman)*** *Sea $\mathbf{y}_0$ un punto aislado crítico hiperbólico de (1.15). Entonces existen entornos U de $\mathbf{y}_0$ y V de $\mathbf{0}$ tales que los sistemas (1.15) y (1.16) son localmente topológicamente conjugados.*

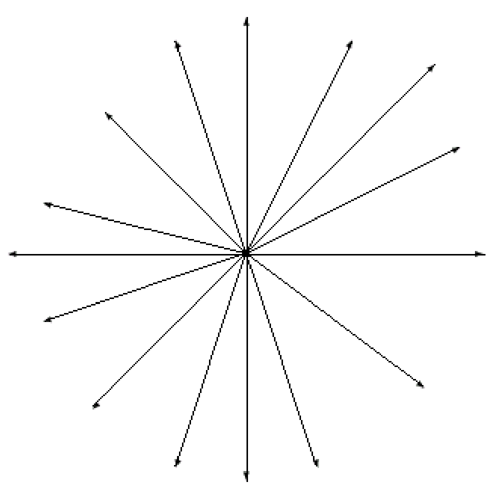
En virtud del teorema anterior sabemos que los sistemas

$$\begin{cases} x' = x^2 + 2x + y^2, \\ y' = -2x^3 + 2y. \end{cases}$$

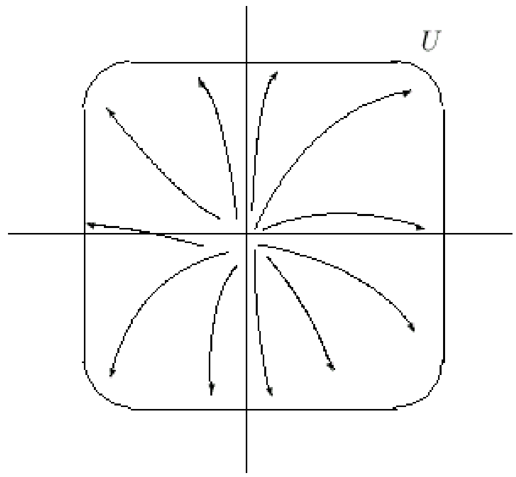
y

$$\begin{cases} x' = 2x, \\ y' = 2y, \end{cases}$$

son localmente topológicamente conjugados en un entorno del punto $(0, 0)$. Así, si el diagrama de fases del sistema linealizado es



sin conocer exactamente las órbitas del sistema no linealizado sabemos que cerca de $(0,0)$ se obtienen "deformando" de forma continua las órbitas del sistema linealizado, como por ejemplo muestra la siguiente figura:



Obsérvese como en el dibujo las rectas del sistema linealizado son deformadas y transformadas en curvas. Además, como la orientación temporal se conserva, la estabilidad del punto crítico puede estudiarse a partir del sistema no linealizado. Así, el punto crítico $(0,0)$ es inestable para el sistema no linealizado dado que es inestable para el sistema linealizado.

Hemos de enfatizar el carácter local del Teorema de Hartman–Grobman. Por ejemplo consideramos el sistema

$$\begin{cases} x' = -x, \\ y' = 1 - x^2 - y^2, \end{cases} \tag{1.17}$$

con dos puntos críticos hiperbólicos, $(0,1)$ y $(0,-1)$. A partir del resultado anterior vemos que $(0,1)$ es asintóticamente estable y $(0,-1)$ es inestable, pero obviamente el sistema (1.17) no puede ser globalmente conjugado a los sistemas $\mathbf{y}' = \mathbf{Jf}(0,1)\cdot\mathbf{y}$ o $\mathbf{y}' = \mathbf{Jf}(0,-1)\cdot\mathbf{y}$, dado que éstos sólo tienen un punto crítico.

1.10.2. El método directo de Lyapunov

Aunque el Teorema de Hartman–Grobman proporciona una herramienta útil para distinguir la estabilidad de puntos críticos hiperbólicos, resulta ineficaz para tratar la misma cuestión con puntos críticos no hiperbólicos. Una opción alternativa válida también en el caso de no hiperbolicidad es el *método directo de Lyapunov*, de clara inspiración física. Consideremos nuevamente el sistema autónomo

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}) \tag{1.18}$$

y sea $\mathbf{y}_0$ un punto crítico, hiperbólico o no, del mismo. El método directo de Lyapunov consiste en encontrar una función escalar $V : U \to \mathbb{R}$, con U un entorno de $\mathbf{y}_0$, satisfaciendo ciertas condiciones. Esta función puede ser considerada como una medida de la "energía potencial" del sistema, de manera que a lo largo de las órbitas ésta decrece cuando $t \to \infty$, indicando estabilidad, o bien crece, indicando inestabilidad. Precisemos a continuación estas ideas.

Dada una solución $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ de (1.18), la derivada de V a lo largo de $\mathbf{y}(t)$ es

$$\frac{d}{dt}V(\mathbf{y}(t)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(\mathbf{y}(t))}{\partial y_i} y_i'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(\mathbf{y}(t))}{\partial y_i} f_i(\mathbf{y}(t)) = \mathrm{grad}V(\mathbf{y}(t)) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{y}(t)),$$

donde $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_n)$ y $\mathrm{grad}V$ denota el gradiente de V. Definimos entonces la derivada total de V como

$$\dot{V}(\mathbf{y}) := \mathrm{grad}V(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{y}).$$

El siguiente resultado nos garantiza la estabilidad del punto crítico en cuestión.

Teorema 9 *Sean $\mathbf{y}_0$ un punto crítico del sistema (1.18) y $V : U \to \mathbb{R}$, con U un entorno de $\mathbf{y}_0$, continua en U y derivable en $U \setminus \{\mathbf{y}_0\}$. Supongamos que $V(\mathbf{y}_0) = 0$ y $V(\mathbf{y}) > 0$ para todo $\mathbf{y} \in U \setminus \{\mathbf{y}_0\}$. Entonces*

(a) Si $\dot{V}(\mathbf{y}) \leq 0$ para todo $\mathbf{y} \in U \setminus \{\mathbf{y}_0\}$, entonces $\mathbf{y}_0$ es estable.

(b) Si $\dot{V}(\mathbf{y}) < 0$ para todo $\mathbf{y} \in U \setminus \{\mathbf{y}_0\}$, entonces $\mathbf{y}_0$ es asintóticamente estable.

Si V satisface las condición (a) [resp. (b)] del resultado anterior, se dirá una *función de Lyapunov para* $\mathbf{y}_0$ [resp. una *función de Lyapunov estricta para* $\mathbf{y}_0$]. Por ejemplo, el sistema

$$\begin{cases} x' = y - x^3, \\ y' = -x. \end{cases}$$

Es claro que $(0,0)$ es un punto crítico aislado del sistema. La matriz Jacobiana en dicho punto es

$$\mathbf{Jf}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

que como puede comprobarse tiene por valores propios $\pm i$, por lo que dicho punto crítico no es hiperbólico. Vamos a comprobar que la función $V(x,y) = x^2 + y^2$ es una función de Lyapunov estricta para el mismo, por lo que $(0,0)$ será un punto crítico asintóticamente estable. En primer lugar, está claro que $V(0,0) = 0$ y $V(x,y) > 0$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Por otra parte, la derivada total es

$$\dot{V}(x,y) = \mathrm{grad}V(x,y) \cdot \mathbf{f}(x,y) = (2x, 2y) \cdot (y - x^3, -x) = -2x^4 \leq 0$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. En virtud del Teorema 9 el punto crítico es estable.

También la inestabilidad de los puntos críticos puede ser discutida, según muestra el siguiente resultado.

Teorema 10 *Sean $\mathbf{y}_0$ un punto crítico del sistema (1.18) y D un abierto de $\mathbb{R}^n$ conteniendo a $\mathbf{y}_0$ en su frontera $\mathrm{Fr}(D)$. Supongamos que existe una función $V : U \to \mathbb{R}$, con U un entorno de $\mathbf{y}_0$, con $D \cup \mathrm{Fr}(D) \subset U$, de clase C^1 y tal que $V(\mathbf{y}) > 0$ y $\dot{V}(\mathbf{y}) > 0$ para todo $\mathbf{y} \in D$, y $V(\mathbf{y}) = 0$ si $\mathbf{y} \in \mathrm{Fr}(D)$. Entonces $\mathbf{y}_0$ es inestable.*

Consideremos ahora el sistema

$$\begin{cases} x' = y + x^3, \\ y' = x. \end{cases}$$

Sea la función $V : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ |y| < x\}$ y $V(x, y) = x^2 - y^2$. Es fácil darse cuenta de que $V(x, y) > 0$ para todo $(x, y) \in D$, y que la derivada total

$$\dot{V}(x, y) = \mathrm{grad}V(x, y) \cdot \mathbf{f}(x, y) = (2x, -2y) \cdot (y + x^3, x) = 2x^4 > 0$$

para todo $(x, y) \in D$. Además $(0, 0) \in \mathrm{Fr}(D)$ y $V(x, y) = 0$ para todo $(x, y) \in \mathrm{Fr}(D)$. Por el Teorema 10 el punto crítico $(0, 0)$ es inestable.

La principal desventaja de este método, que de hecho hace que su utilización sea cuando menos limitada, es la dificultad en encontrar la función V.

1.11. Ejercicios

1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales de la forma

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}$$

donde la matriz $\mathbf{A}$ es la siguiente:

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(c)} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{(d)} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(e)} \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{(f)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{(g)} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(h)} \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & 8 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{(i)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Resolver los siguientes problemas de condiciones iniciales:

$$\text{(a)} \begin{cases} x' = y \\ y' = -x \\ x(0) = y(0) = 1. \end{cases} \quad \text{(b)} \begin{cases} x' = -4(x + y) \\ x' + 4y' = -4y \\ x(0) = 1,\ y(0) = 0. \end{cases} \quad \text{(c)} \begin{cases} x' = 3x + 8y \\ y' = -3y - x \\ x(0) = 6,\ y(0) = -2. \end{cases}$$

$$\text{(d)} \begin{cases} x' = x - z \\ y' = 2y \\ z' = x + z \\ x(0) = -2,\ y(0) = 2,\ z(0) = -1. \end{cases} \quad \text{(e)} \begin{cases} x' = y + z \\ y' = -x + z \\ z' = -x - y \\ x(0) = y(0) = z(0) = -1. \end{cases}$$

3. Resolver los siguientes sistemas y problemas de condiciones iniciales

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{c} x' = y + te^{2t} \\ y' = -2x + 3y + e^{2t} \\ x(0) = 1,\ y(0) = -1. \end{array} \right. \qquad \text{(b)} \left\{ \begin{array}{l} x' = 4x + 3y + 5z + e^t \sin 2t \\ y' = -y - 4z \\ z' = 2y + 3z \end{array} \right.$$

$$\text{(c) } \mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(d)} \left\{ \begin{array}{c} x' = 2x + y - z \\ y' = -3x - y + z + t \\ z' = 9x + 3y - 4z \\ x(0) = z(0) = 0,\ y(0) = 3. \end{array} \right.$$

$$\text{(e)} \left\{ \begin{array}{c} x' = -2x - 5y + t \\ y' = x + 2y + t^2 \\ x(0) = 1,\ y(0) = 0. \end{array} \right. \qquad \text{(f)} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin t \end{pmatrix} \\ x(0) = -1,\ y(0) = 0. \end{array} \right.$$

4. Dados los siguientes sistemas lineales, decidir si son estables o no.

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{l} x' = x - 5y + 5z, \\ y' = -2x - 2y + 2z, \\ z' = 3x - 3y + 3z. \end{array} \right. \quad \text{(b)} \left\{ \begin{array}{l} x' = -5x + y - z, \\ y' = -2x - 2y + 2z, \\ z' = -3x + 3y - 3z. \end{array} \right. \quad \text{(c)} \left\{ \begin{array}{l} x' = -x - 2z, \\ y' = 3x - 2y, \\ z' = 4x + z. \end{array} \right.$$

$$\text{(d)} \left\{ \begin{array}{l} x' = -9x + y - 2z, \\ y' = 3x - 9y, \\ z' = 4x + y + z. \end{array} \right. \quad \text{(e)} \left\{ \begin{array}{l} x' = -5x + y - z, \\ y' = -3x - y + 3z, \\ z' = -4x + 4y - 2z. \end{array} \right. \quad \text{(f)} \left\{ \begin{array}{l} x' = -2x - 2y + 2z, \\ y' = -2x - 2y + 2z, \\ z' = 0. \end{array} \right.$$

5. Obtener los puntos críticos de los siguientes sistemas y determinar si son o no hiperbólicos:

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{l} x' = x - xy \\ y' = -y + y^2 \end{array} \right. \quad \text{(b)} \left\{ \begin{array}{l} x' = y \\ y' = -x + x^3 \end{array} \right. \quad \text{(c)} \left\{ \begin{array}{l} x' = x - xy \\ y' = x - y \end{array} \right. \quad \text{(d)} \left\{ \begin{array}{l} x' = y \\ y' = x^3 \end{array} \right.$$

$$\text{(e)} \left\{ \begin{array}{l} x' = y - e^x \\ y' = y + e^{-x} \end{array} \right. \quad \text{(f)} \left\{ \begin{array}{l} x' = -x \\ y' = 1 - x^2 - y^2 \end{array} \right. \quad \text{(g)} \left\{ \begin{array}{l} x' = -x^2 + xy - x + y \\ y' = -x^2 + y^2 + x - 4y + 2 \end{array} \right.$$

6. Obtener el sistema linealizado en los puntos críticos de los sistemas del ejercicio 5. Determinar su diagrama de fases e indicar si es posible la naturaleza del punto crítico en un entorno del mismo.

7. Consideremos la ecuación de Van Der Pol

$$x'' + x - \varepsilon x'(1 - x^2) = 0$$

donde ε es un parámetro real. Transformar dicha ecuación en un sistema plano y determinar los puntos críticos del mismo. Determinar la naturaleza de los puntos críticos en función del parámetro ε.

8. Idem para la ecuación

$$x'' + 2\varepsilon x' + (1 - \varepsilon^2)x = 0.$$

9. Sea el sistema
$$\begin{cases} x' = x + (\varepsilon + 1)y \\ y' = 2(\varepsilon - 1)x + y \end{cases}$$
donde ε es un parámetro real. Se pide:

   a) Discutir la estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema en función del parámetro ε.

   b) Esbozar el diagrama de fases del sistema para el valor $\varepsilon = 1$.

10. Sea el sistema
$$\begin{cases} x' = -x + 2x(x+y)^2 \\ y' = -y^3 + 2y^3(x+y)^2. \end{cases}$$
Determinar los puntos críticos del mismo y su hiperbolicidad. Determinar la naturaleza del punto crítico $(0,0)$ a partir de la función $V(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

11. Idem para el sistema
$$\begin{cases} x' = y - xy^2 \\ y' = -x^3 \end{cases}$$
y la función $V(x,y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}y^2$.

12. Idem con el sistema
$$\begin{cases} x' = x^3 - x - y \\ y' = x \end{cases}$$
y la función $V(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

13. Idem con el sistema
$$\begin{cases} x' = x + x^2 + xy + y^2 \\ y' = x^2 + xy + y^2 \end{cases}$$
y la función $V(x,y) = x^2 - y^2$ definida sobre el conjunto del plano real $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < |y| < x\}$.

14. Un sistema
$$\begin{cases} x' = f_1(x,y) \\ y' = f_2(x,y) \end{cases}$$
se dice Hamiltoniano si existe una función derivable $H(x,y)$ tal que $f_1(x,y) = -\frac{\partial H}{\partial y}(x,y)$ y $f_2(x,y) = \frac{\partial H}{\partial x}(x,y)$, de tal manera que H es una integral primera del sistema. Se puede comprobar que para un punto crítico de un sistema Hamiltoniano, las funciones de Lyapunov pueden construirse sumando una constante a la función H. Con esta idea, verificar el carácter de los puntos críticos del sistema
$$\begin{cases} x' = y - y^2 \\ y' = x - x^2 \end{cases}$$

Bibliografía

[BaJi] F. Balibrea y V. Jiménez López, *Ecuaciones diferenciales para las ciencias químicas y físicas,* DM–Universidad de Murcia, 2001.

[Bra] M. Braun, *Differential equations and their applications,* Springer–Verlag, Berlin, 1993.

[DeGr] W. R. Derrick y S. I. Grossman, *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones,* Fondo Educativo Interamericano, 1984.

[GSCO] S. Guo, L. S. Shieh, G. Chen y M. Ortega, *Ordering chaos in Chua's circuit: a sampled–data feedback and digital redesign approach,* International Journal of Bifurcations and Chaos **10** (2000), 2221–2231.

[HiSm] M. W. Hirsch y S. Smale, *Ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y álgebra lineal,* Alianza Editorial, 1983.

[Jim] V. Jiménez López, *Apuntes de ecuaciones diferenciales,* Servicio de publicaciones, Universidad de Murcia, 2000.

[KKM] A. Kiseliov, M. Krasnov y G. Makarenko, *Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias,* Mir 1988.

[MCZ] F. Marcellán, L. Casasús y A. Zarzo, *Ecuaciones diferenciales. Problemas lineales y aplicaciones,* McGraw–Hill, 1990.

[PeTo] V. M. Pérez García y P. J. Torres, *Problemas de ecuaciones diferenciales,* Ariel Practicum, 2001.

[NaSa] R. K. Nagle y E. B. Saff, *Fundamentos de ecuaciones diferenciales (*2^a edición*),* Addison Wesley Longman, 1992.

[Sim] G. F. Simmons, *Ecuaciones diferenciales (con aplicaciones y notas históricas),* 2^a *Edición,* McGraw–Hill, 1993.

[Sot] J. Sotomayor, *Licoes de ecuaciones diferenciais ordinárias,* Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.