AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS. Curso 2020/21

Examen parcial. 2–2–2021

Parte Conjunta

- Nombre y apellidos:
- DNI:
- En los ejercicios prácticos se valorará que estén explicados, indicando qué resultado o propiedad se ha usado para resolverlo, justificando que dicho resultado se puede utilizar.

1. **(2 puntos)** Dado el sistema

$$\begin{cases} x' = -x - 3y + 4, \\ y' = 3x - y + t, \\ x(0) = y(0) = 1, \end{cases}$$

demostrar que es asintóticamente estable y obtener la solución en los regímenes estacionario y transitorio.

Solución. La matriz del sistema

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

tiene polinomio carácterístico

$$p(t) = \begin{vmatrix} -1-t & -3 \\ 3 & -1-t \end{vmatrix} = t^2 + 2t + 10$$

cuyas raíces son $-1 \pm 3i$, por lo que al tener parte real negativa el sistema es asintóticamente estable. Tomamos la transformada de Laplace y obtenemos

$$\begin{cases} \mathcal{L}[x'](z) = \mathcal{L}[-x - 3y + 4](z), \\ \mathcal{L}[y'](z) = \mathcal{L}[3x - y + t](z), \end{cases}$$

que aplicando las propiedades de la transformada nos queda como

$$\begin{cases} (z+1)\mathcal{L}[x](z) + 3\mathcal{L}[y](z) = 1 + \frac{4}{z}, \\ (z+1)\mathcal{L}[y](z) - 3\mathcal{L}[x](z) = 1 + \frac{1}{z^2}. \end{cases}$$

Despejando en la primera ecuación $\mathcal{L}[y](z)$ y sustituyendo en la segunda

$$\mathcal{L}[y](z) = \frac{4+z}{3z} - \frac{(z+1)}{3}\mathcal{L}[x](z)$$

$$(z^2 + 2z + 10)\mathcal{L}[x](z) = \frac{z^3 + 2z^2 + 4z - 3}{z^2},$$

de donde

$$\mathcal{L}[x](z) = \frac{z^3 + 2z^2 + 4z - 3}{(z^2 + 2z + 10)z^2}.$$

Los polos son 0 (doble) y $-1 \pm 3i$. Para calcular el régimen estacionario

$$\begin{aligned} x(t) &\simeq Res\left(e^{zt}\frac{z^3 + 2z^2 + 4z - 3}{(z^2 + 2z + 10)z^2}, 0\right) \\ &= \frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}e^{zt}\frac{z^3 + 2z^2 + 4z - 3}{(z^2 + 2z + 10)} = \frac{23 - 15t}{50} \end{aligned}$$

y en el régimen transitorio

$$
\begin{aligned}
x(t) &\simeq Res\left(e^{zt}\frac{z^3+2z^2+4z-3}{(z^2+2z+10)z^2},0\right)\\
&\quad +Res\left(e^{zt}\frac{z^3+2z^2+4z-3}{(z^2+2z+10)z^2},-1+3i\right)+Res\left(e^{zt}\frac{z^3+2z^2+4z-3}{(z^2+2z+10)z^2},-1-3i\right)\\
&= \frac{23-15t}{50}\\
&\quad +\lim_{z\to -1+3i} e^{zt}\frac{z^3+2z^2+4z-3}{(z^2+2z+10)z^2}(z+1-3i)+\lim_{z\to -1-3i} e^{zt}\frac{z^3+2z^2+4z-3}{(z^2+2z+10)z^2}(z+1+3i)\\
&= \frac{23-15t}{50}+\frac{e^{-t}\left(14ie^{3ti}-27e^{3ti}\right)}{100}+\frac{e^{-t}\left(-14ie^{-3ti}-27e^{-3ti}\right)}{100}\\
&= \frac{23-15t}{50}-\frac{e^{-t}}{100}\left(7\left(\frac{e^{3ti}-e^{-3ti}}{2i}\right)+54\left(\frac{e^{3ti}+e^{-3ti}}{2}\right)\right)\\
&= \frac{23-15t}{50}-\frac{e^{-t}}{100}\left(7\sin(3t)+54\cos(3t)\right).
\end{aligned}
$$

Despejando $y(t)$ de la ecuación

$$x' = -x-3y+4$$

se obtienen los regímenes estacionario y transitorio de $y(t)$.

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS. Curso 2020/21

Examen parcial. 2–2–2021

Teoría de Campos

1. **(2 puntos)** Sea $\mathbf{F}(x,y) = (xy+\sin(x^2), y+\alpha x^2+1)$ un campo vectorial plano. Calcular α para que sea conservativo y obtener para dicho valor de α

$$\int_\gamma \mathbf{F}dl$$

donde $\gamma(t) = (\sin t, \cos t)$, $t \in [0,\pi]$.

Solución. Dado que el campo está definido en todo el plano, para que sea conservativo basta que

$$2\alpha x = \frac{\partial}{\partial x}\left(y+\alpha x^2+1\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(xy+\sin(x^2)\right) = x,$$

por lo que $\alpha = 1/2$. Tomamos σ el segmento de recta que une $\gamma(\pi) = (0,-1)$ con $\gamma(0) = (0,1)$. Por el Teorema de Green

$$\int_{\gamma\cup\sigma} \mathbf{F}dl = \int\int_\Omega 0dxdy = 0,$$

donde Ω es el interior de $\gamma\cup\sigma$. Entonces

$$\int_\gamma \mathbf{F}dl = -\int_\sigma \mathbf{F}dl = -\int_0^1 \langle(0,2t),(0,2)\rangle\, dt = -\int_0^1 4tdt = -2,$$

donde $\sigma(t) = (0, 2t-1)$, con $t \in [0,1]$.

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS. Curso 2020/21

Examen parcial. 2–2–2021

Variable Compleja y Transformadas

1. **(1 Punto)** Demuestre la desigualdad

$$\left| \int_\gamma e^{sen(z)}\, dz \right| \leq 1,$$

siendo γ el segmento que une los puntos $z = 0$ y $z = i$.

2. **(1 Punto)** Determine la parte real y la parte imaginaria de la función $f(z) = \cos(\overline{z})$.

3. **(1 Punto)** Calcule la integral

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z(1-z)^2}\, dz,$$

siendo $\gamma(t) = 1 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $0 < r < 1$.

4. **(1 Punto)** Calcule la integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3 + \cos(x)}\, dx.$$