Métodos de un paso.

1. Aplica el método de Euler para resolver el problema $y' = 1 - 2ty$, $y(0) = 1$, dando tres pasos de amplitud $h = 0.1$ para aproximar $y(0.3)$.

2. Aplica el método de Euler para resolver el problema $y'' + 2y' + 4y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$, dando dos pasos de amplitud $h = 0.2$ para aproximar $y(0.4)$.

3. Encuentra coeficientes $a_{2\,1}, a_{3\,1}, a_{3\,2}$ para un método de Runge Kutta de tres pasos

$$\begin{array}{c|ccc} 1/2 & a_{2\,1} & & \\ 1 & a_{3\,1} & a_{3\,2} & \\ \hline & 1/6 & 4/6 & 1/6 \end{array}$$

   sea de tercer orden.

4. Resuelve el sistema de dos ecuaciones

$$\begin{cases} y_1' = t \cdot y_1 \cdot y_2 \\ y_2' = 3y_1 + 2y_2 \end{cases}$$

   con las condiciones iniciales $y_1(3) = -1.312258$, $y_2(3) = -0.414524$ dando un paso con $h = 0.04$ y dos pasos con $h = 0.02$ y el método Runge-Kutta clásico de cuarto orden.

5. Se considera el esquema

$$\begin{aligned} y_n &= y_{n-1} + \frac{3}{4}\,h\,f\left(t_{n-1} + \frac{h}{3}, y_{n-1} + h\,f(t_{n-1}, y_{n-1})\right) + \\ &\quad + \frac{1}{4}\,h\,f(t_{n-1} + h, y_{n-1} + hf(t_{n-1}, y_{n-1})) \end{aligned}$$

   Plantea el método como un método Runge-Kutta y escribe su tablero de Butcher. ¿Tiene el orden máximo posible?

6. Se considera el método

$$\begin{array}{c|ccc} 1/2 & 1/2 & & \\ 3/4 & 0 & 3/4 & \\ \hline & 2/9 & 3/9 & 4/9 \end{array}$$

   Escribe el algoritmo y estudia el orden.

7. Obtener un método de Runge Kutta de tercer orden

$$\begin{array}{c|ccc} 1/3 & 1/3 & & \\ c_3 & 0 & c_3 & \\ \hline & 1/4 & b_2 & 3/4 \end{array}$$

   Resuelve con este método el problema $y' + y + t$, $y(0) = 0$ en $[0, 0.2]$ tomando $h = 0.1$ con este método.

8. Halla todos los métodos de orden máximo de tablero

$$\begin{array}{c|ccc} c_2 & c_2 & & \\ c_3 & a_{3\,1} & a_{3\,2} & \\ \hline & 1/6 & 4/6 & 1/6 \end{array}$$

   Utiliza uno de ellos para aproximar la solución de $y' = t \cdot y$, $y(0) = 1$ en $t = 0.2$ dando dos de amplitud $h = 0.1$.

9. Se considera el método de tablero
$$\begin{array}{c|cc} 2/3 & 2/3 & \\ \hline & 1/4 & 3/4 \end{array}$$

   (a) Estudia el orden del método.

   (b) Hemos integrado con este método el problema y'^t, $y(0) = 1$ en el intervalo $[0, 1]$ y hemos obtenido la siguiente tabla de errores.

h	$error$
1/4	$1.23047 \cdot 10^{-4}$
1/40	$1.24191 \cdot 10^{-7}$
1/400	$1.24266 \cdot 10^{-10}$

   ?'Se ajusta el error numérico al teórico? Razona tu respuesta calculando el error local asociado al problema.

10. Estudia si hay un Runge-Kutta de tres etapas y orden tres con $b_1 = b_2 = b_3$.

11. Transforma el problema $y''(t) = y(t)+t\cdot y'(t)$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 3$, en un sistema de primer orden y aproxima la solución en el tiempo $t = 1.04$ tomando $h = 0.02$ para el método Runge-Kutta de tablero
$$\begin{array}{c|cc} 2/3 & 2/3 & \\ \hline & 1/4 & 3/4 \end{array}$$

Solución. En primer lugar tomamos las variable $y_1 = y$ e $y_2 = y'$, con lo que la ecuación se transforma en el problema
$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_1 + ty_2, \\ y_1(1) = 2,\ y_2(1) = 3. \end{cases}$$

Calculamos $y_1(1.02)$ e $y_2(1.02)$:
$$\begin{aligned}
k_1 &= 0.02f(1, 2, 3) = (0.06, 0.1) \\
k_2 &= 0.02f\left(1 + \frac{2}{3}0.02, 2 + \frac{2}{3}0.06, 3 + \frac{2}{3}0.1\right) = (0.004, 0.0448533333333333) \\
y_1(1.02) &\simeq 2 + \frac{1}{4}0.06 + \frac{3}{4}0.004 = 2.061 \\
y_2(1.02) &\simeq 3 + \frac{1}{4}0.1 + \frac{3}{4}0.0448533333333333 = 3.1022133333333333.
\end{aligned}$$

Calculamos $y_1(1.04)$ e $y_2(1.04)$:
$$\begin{aligned}
k_1 &= 0.02f(1.02, 2.018, 3.05864) = (0.062044266666667, 0.104505152) \\
k_2 &= 0.02f\left(1.02 + \frac{2}{3}0.02, 2.061 + \frac{2}{3}0.062044266666667, 3.1022133333333333 + \frac{2}{3}0.104505152\right) \\
&= (0.063437668693333, 0.10759951453867) \\
y_1(1.02) &\simeq 2.061 + \frac{1}{4}0.062044266666667 + \frac{3}{4}0.063437668693333 = 2.124089318186667 \\
y_2(1.02) &\simeq 3.1022133333333333 + \frac{1}{4}0.104505152 + \frac{3}{4}0.10759951453867 = 3.1022133333333333.
\end{aligned}$$

Luego
$$y(1.04) \simeq 2.124089318186667$$

12. Estudia si hay algún Runge-Kutta explícito de tres etapas y orden tres con $c_2 = c_3$. En caso afirmativo escribe el tablero de Butcher de todos ellos.

13. Se quiere aproximar la solución en el tiempo $t = 1.02$ del sistema

$$\begin{cases} x'(t) = t \cdot z(t), & x(1) = 1 \\ x'(t) = x(t) + z(t), & z(1) = -2 \end{cases}$$

Da dos pasos con $h = 0.01$ para el método Runge-Kutta de tablero

$$\begin{array}{c|ccc} 1/2 & 1/2 & & \\ 1 & -1 & 2 & \\ \hline & 1/6 & 4/6 & 1/6 \end{array}$$

14. Encuentra el Runge-Kutta explícito de tres etapas y orden tres con $b_1 = c_3 = 0$.

Solución. Tomamos las ecuaciones

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 1, \\ c_2 = a_{21}, \\ c_3 = a_{31} + a_{32}, \\ b_2 c_2 + b_3 c_3 = \frac{1}{2}, \\ b_2 c_2^2 + b_3 c_3^2 = \frac{1}{3}, \\ b_3 a_{32} c_2 = \frac{1}{6}, \end{cases}$$

y particularizamos

$$\begin{cases} b_2 + b_3 = 1, \\ c_2 = a_{21}, \\ 0 = a_{31} + a_{32}, \\ b_2 c_2 = \frac{1}{2}, \\ b_2 c_2^2 = \frac{1}{3}, \\ b_3 a_{32} c_2 = \frac{1}{6}, \end{cases}$$

Tomamos las ecuaciones

$$\begin{cases} b_2 c_2 = \frac{1}{2}, \\ b_2 c_2^2 = \frac{1}{3}, \end{cases}$$

de donde

$$b_2 = \frac{3}{4},\ c_2 = a_{21} = \frac{2}{3}.$$

Por tanto

$$b_3 = \frac{1}{4}$$

y

$$a_{32} = 1 = -a_{31},$$

probando así la existencia del método.

15. Estudia si existe algún Runge-Kutta de dos etapas y orden dos con $b_1 = 0$. Estudia si existe algún Runge-Kutta de tres etapas y orden tres con $b_1 = b_2 = 0$.

16. Para resolver el sistema de dos ecuaciones

$$\begin{cases} y_1' = t \cdot y_1 \cdot y_2 \\ y_2' = 3y_1 + 2y_2 \end{cases}$$

con las condiciones iniciales $y_1(3) = -1.312258$, $y_2(3) = -0.414524$ se va a utilizar un método Runge-Kutta de tablero

$$\begin{array}{c|ccc} 1/3 & 1/3 & & \\ 2/3 & 0 & 2/3 & \\ \hline & b_1 & b_2 & b_3 \end{array}$$

Encuentra una elección de los coeficientes con orden tres. Aproxima $y(3.04)$ dando un paso con $h = 0.04$ con el método de tercer orden.