

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS.

OPTIMIZACIÓN ESTÁTICA.

1. Encuentra sobre $\mathbb{R}$, los extremos locales y globales de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^5 + x^4 - \frac{x^3}{3} + 2$ b) $g(x) = (2x + 1)^2(x - 4)$

2. Halla los extremos locales y globales de $f(x) = x^3 - 12x + 3$ en el intervalo $[-4, 4]$.

3. Dada la función

$$f(x, y) = e^{ax+y^2} + b \operatorname{sen}(x^2 + y^2), \quad a, b \in \mathbb{R}$$

- a) Determina el valor de a y b , sabiendo que $f(x, y)$ tiene un extremo relativo en $(0, 0)$ y que el polinomio de Taylor de 2º orden de $f(x, y)$ en ese punto, toma el valor 6 en el punto $(1, 2)$.

- b) Indica la clase de extremo que presenta $f(x, y)$ en $(0, 0)$.

4. Estudia los extremos relativos y absolutos de las siguientes funciones

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 + 3xy - y^2 \\ f(x, y) &= x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y \\ f(x, y) &= \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \cos(x + y) \quad 0 < x, y < 2\pi \end{aligned}$$

5. Demuestra que el origen es el único punto crítico de la función

$$f(x, y, z) = xy + yz + zx$$

- a) ¿Es un punto de máximo o de mínimo relativo?

- b) Encuentra 2 rectas que pasen por el origen tal que en una de ellas sea $f > 0$ y en la otra $f < 0$. ¿Porqué es posible encontrar estas rectas?

6. Encuentra los extremos de las siguientes funciones sobre los conjuntos correspondientes:

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= xy(1 - x^2 - y^2) & \text{en } \Omega_1 &= [0, 1] \times [0, 1] \\ f_2(x, y) &= xy & \text{en } \Omega_2 &= \text{Triángulo de vértices } (0, 0) - (1, 0) - (0, 1) \end{aligned}$$

7. Determina, si existen, los extremos relativos y absolutos de la función $f(x, y, z) = y$ sobre el conjunto

$$F = \{x^2 + z^2 = 9; x + y + z = 1\}$$

8. Resuelve el problema

$$\begin{array}{ll} \text{Optimizar} & f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \\ \text{Sujeto a} & x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx - 1 = 0 \\ & x + 2y - 3z = 0 \end{array}$$

9. Halla la mínima distancia entre la recta $x + y = 4$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$

10. Maximiza la función $f(x, y, z) = 3 + x^2 + 2y^2 + 4y - 2x + (z - 2)^2$, sujeta a la restricción $2x + 4y + z = 0$.

11. Resuelve el problema

$$\begin{array}{ll} \text{Optimizar} & x^2 y \\ \text{Sujeto a} & x^2 + y^2 = 1 \end{array}$$

12. Determina los óptimos de $f(x, y, z) = xy + yz + zx$, sujeta a la restricción $x + y + z = 120$

13. Resuelve el siguiente problema

$$\begin{array}{ll} \text{Optimizar} & -x^2 + 2y + z \\ \text{Sujeto a} & x + 2y - z = 0 \\ & 2y + z = 0 \end{array}$$

14. Un meteoro se mueve a lo largo de la trayectoria de ecuación

$$y = x^2 + 3x - 6$$

Una estación espacial se encuentra en el punto $(x, y) = (2, 2)$. Utiliza las condiciones de KKT para encontrar el punto más cercano entre el meteoro y la estación.

15. Halla los óptimos relativos y absolutos, si los hay, que alcanza $f(x, y, z) = z$, sobre el conjunto $F = \{x^2 + y^2 \leq 4; x + y + z = 5\}$
16. Resuelve el problema

$$\begin{array}{ll} \text{Optimizar} & x^2 + 2(y - 1) \\ \text{Sujeto a} & x + y^2 \leq 1 \end{array}$$

17. Realiza la descomposición del número 6 en 3 sumandos, de forma que:

- a) Su producto sea máximo.
 - b) Su producto sea mínimo.
 - c) ¿Qué se puede decir si los tres números son no negativos?
18. Halla, si existen, los extremos relativos y absolutos de la función $f(x, y) = x^2y$ sobre el conjunto de los puntos que cumplen $x^2 + y^2 \leq 1$.
19. Dado el siguiente problema de programación no lineal

$$\begin{array}{ll} \text{Optimizar} & (x - 7)^2 + (y - 10)^2 \\ \text{Sujeto a} & y - 8 \leq 0 \\ & (x - 10)^2 + (y - 10)^2 - 36 \leq 0 \end{array}$$

- a) Discute las posibles soluciones del problema utilizando el método de los multiplicadores de K.K.T.
20. Dado el siguiente problema de programación no lineal

$$\begin{array}{ll} \text{Optimizar} & x + y \\ \text{Sujeto a} & x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1 \\ & y - x^2 - 1 \geq 0 \end{array}$$

Discute las posibles soluciones del problema utilizando el método de los multiplicadores de K.K.T.

21. Dado el siguiente problema de programación no lineal

$$\begin{array}{ll} \text{Optimizar} & (x - 2)^2 + (y - 2)^2 \\ \text{Sujeto a} & y - 5 \leq 0 \\ & (x - 4)^2 + (y - 4)^2 - 16 \leq 0 \end{array}$$

Discute las posibles soluciones del problema utilizando el método de los multiplicadores de K.K.T.

22. Determinar gráficamente el máximo y mínimo absolutos de la función $f(x, y) = x^2 + (y - 4)^2$ sobre el conjunto $F = \{(x, y) | x + y \geq 3; -x + y \leq 3; x \leq 2\}$.

Plantea las condiciones de K.K.T. del problema anterior y utiliza la gráfica para deducir qué restricciones son activas y cuales inactivas en los puntos de máximo y mínimo. Calcular a partir de los datos anteriores esos valores máximo y mínimo.