AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS. M.I.I.
MÉTODOS NUMÉRICOS MULTIPASO PARA E.D.O.

- **Nota:** En los siguientes ejercicios, denotaremos por $f_n = f(t_n, y_n)$.

1. Sea el esquema $y_n - (1+a)y_{n-1} + a\,y_{n-2} = \dfrac{h}{12}((5+a)f_n + 8(1-a)f_{n-1} - (1+5a)f_{n-2}$.

   (a) Estudia en función de a convergencia y orden del método.

   (b) Elige el método de mayor orden e integra con $h = 0.1$ el problema $y' = t - 5y$, $y(0) = 1$ en el intervalo $0 \le t \le 0.3$, inicializando con un método de un paso del mismo orden que el método multipaso.

Solución. Es un método ímplícito de dos pasos. Lo escribimos como

$$y_n = (1+a)y_{n-1} - a\,y_{n-2} + \frac{h}{12}((5+a)f_n + 8(1-a)f_{n-1} - (1+5a)f_{n-2}).$$

Entonces

$$\begin{aligned}
a_0 + a_1 &= 1 + a - a = 1,\\
-a_1 + b_{-1} + b_0 + b_1 &= a + \frac{5+a}{12} + \frac{2-2a}{3} - \frac{1+5a}{12} = 1,\\
a_1 + 2b_{-1} - 2b_1 &= -a + \frac{5+a}{6} + \frac{1+5a}{6} = 1,\\
-a_1 + 3b_{-1} + 3b_1 &= a + \frac{5+a}{4} - \frac{1+5a}{4} = 1,\\
a_1 + 4b_{-1} - 4b_1 &= -a + \frac{5+a}{3} - \frac{1+5a}{3} = \frac{4}{3} - \frac{7}{3}a = 1
\end{aligned}$$

si y solo si

$$a = \frac{1}{7}.$$

Así, si $a = 1/7$ el orden local será 5 y en caso contrario 4. Por otra parte

$$y^2 - (1+a)y + a = 0 \to y = \frac{1 + a \pm \sqrt{(1+a)^2 - 4a}}{2} = 1,\ a,$$

por lo que el método será estable si $|a| < 1$. En particular, el método con $a = 1/7$ es el que tiene orden global mayor 4. Particularizando con $a = 1/7$,

$$y_n = \frac{8}{7}y_{n-1} - \frac{1}{7}\,y_{n-2} + \frac{h}{12}(\frac{35}{7}f_n + \frac{48}{7}f_{n-1} - \frac{12}{7}f_{n-2}).$$

Para inicializar el método tomamos un Runge Kutta del mismo orden global, con tablero de Butcher

$$\begin{array}{c|cccc}
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}
\end{array}$$

Así, si $f(t,y)=t-5y$, tenemos que

$$\begin{aligned} k_1 &= 0.1f(0,1)=-0.5,\\ k_2 &= 0.1f(0+0.1/2,1+0.1k_1/2)=-0.4825,\\ k_3 &= 0.1f(0+0.1/2,1+0.1k_2/2)=-0.4829375,\\ k_4 &= 0.1f(0+0.1,1+0.1k_3)=0.03414 \end{aligned}$$

$$y(0.1)\simeq y_1=y(0)+b_1k_1+b_2k_2+b_3k_3+b_4k_4=0.600054.$$

Tomamos ahora el predictor de Hermite de orden local 5

$$y_n=-4y_{n-1}+5\,y_{n-2}+h(4f_{n-1}-2f_{n-2}),$$

estimamos

$$\begin{aligned} y_2^* &= -4y_1+5y(0)+0.1(4f(0.1,y_1)-2f(y(0),y(0.1)))\\ &= 0.436728125 \end{aligned}$$

y corregimos una vez, que suele ser suficiente

$$\begin{aligned} y(0.2) &\simeq y_2=\frac{8}{7}y_{n-1}-\frac{1}{7}\,y_{n-2}+\frac{h}{12}(\frac{35}{7}f_n+\frac{48}{7}f_{n-1}-\frac{12}{7}f_{n-2})\\ &= \frac{8}{7}0.600054-\frac{1}{7}+\frac{0.1}{12}(\frac{35}{7}f(0.2,0.436728125)\\ &\quad +\frac{48}{7}f(0.1,0.600054)-\frac{12}{7}f(0,1))\\ &= 0.366387. \end{aligned}$$

Damos un nuevo paso de predictor-corrector y obtenemos

$$y(0.3)\simeq y_2=0.221893$$

2. Estudia para qué valores de a es estable el esquema

$$y_n-(1+a)y_{n-1}+a\,y_{n-2}=h\,f_{n-1}.$$

Solución. Tomamos la ecuación característica

$$y^2-(1+a)y+a=0,$$

cuya solución es

$$\begin{aligned} y &= \frac{1+a\pm\sqrt{(1+a)^2-4a}}{2}\\ &= \frac{1+a\pm\sqrt{(1-a)^2}}{2}\\ &= \frac{1+a\pm(1-a)}{2}, \end{aligned}$$

de donde $y=1$ y a. Así, el método será estable si $|a|\le 1$, $a\ne 1$.

3. Estudia en función de a y b el orden de convergencia de $y_n-y_{n-1}=h(a\,f_{n-1}+b\,f_{n-2})$.

4. Aplica el método anterior al problema $y' = t + 2y$ con $h = 1/4$ para aproximar $y(1)$, partiendo de las condiciones exactas $y(0) = 0$, $y(1/4) = -3/8 + (1/4)\sqrt{e}$.

5. Se considera el método multipaso

$$y_n = y_{n-4} + \frac{4h}{3}(2f_{n-1} - f_{n-2} + 2f_{n-3}).$$

   (a) Estudia convergencia y orden del método.

   (b) Se considera la ecuación $y' = t - y$ con condición inicial $y(0) = 0$. Utiliza este método con $h = 1$ para aproximar $y(4)$.

Solución. El método es estable porque su ecuación característica es

$$y^4 - 1 = 0,$$

cuya soluciones son las raíces cuartas de la unidad que tienen modulo 1. Para ver el orden tomamos las fórmulas

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{j=0}^{3}(-j)^k a_j + \sum_{j=0}^{3}(-j)^{k-1} k b_j \\ &= (-3)^k + 0^{k-1}k\frac{8}{3} - (-1)^{k-1}k\frac{4}{3} + (-2)^{k-1}k\frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Para $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ se cumple la igualdad, por lo que el método tiene orden local $O(h^5)$ y, por ser estable, convergente de orden global $O(h^4)$. Para inicializar el método tomamos un Runge Kutta del mismo orden global, con tablero de Butcher

$$\begin{array}{c|cccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

Así, si $f(t, y) = t - y$, tenemos que

$$\begin{aligned} k_1 &= f(0,0) = 0, \\ k_2 &= f(1/2, k_1/2) = \frac{1}{2}, \\ k_3 &= f(1/2, k_2/2) = 0, \\ k_4 &= f(1, k_3) = 1 \end{aligned}$$

$$y(1) \simeq y(0) + b_1k_1 + b_2k_2 + b_3k_3 + b_4k_4 = \frac{1}{3},$$

$$\begin{aligned} k_1 &= f(1, 1/3) = \frac{2}{3}, \\ k_2 &= f(1 + 1/2, 1/3 + k_1/2) = \frac{5}{6}, \\ k_3 &= f(1 + 1/2, 1/3 + k_2/2) = \frac{3}{4}, \\ k_4 &= f(1 + 1, 1/3 + k_3) = \frac{11}{12} \end{aligned}$$

$$y(2) \simeq y(1) + b_1 k_1 + b_2 k_2 + b_3 k_3 + b_4 k_4 = \frac{9}{8},$$

$$\begin{aligned} k_1 &= f(2, 9/8) = \frac{7}{8}, \\ k_2 &= f(2 + 1/2, 9/8 + k_1/2) = \frac{35}{48}, \\ k_3 &= f(2 + 1/2, 9/8 + k_2/2) = \frac{77}{96}, \\ k_4 &= f(2 + 1, 9/8 + k_3) = \frac{83}{96} \end{aligned}$$

$$y(3) \simeq y(2) + b_1 k_1 + b_2 k_2 + b_3 k_3 + b_4 k_4 = \frac{653}{576}.$$

Una vez inicializado el método, calculamos

$$y(4) \simeq y(0) + \frac{4}{3} \left(2f \left(3, \frac{653}{576} \right) - f \left(2, \frac{9}{8} \right) + 2f \left(1, \frac{1}{3} \right) \right) = \frac{1207}{216}.$$

6. Considera la familia de métodos $y_n = y_{n-1} + h(\alpha f_n + (1 - \alpha) f_{n-1})$.

   (a) Estudia la convergencia y el orden en función de α.

   (b) Para $\alpha = 1/2$ calcula $y(1.05)$ el problema $y' = -10y$, $y(0) = 1$ con $h = 0.1$.

7. Estudia la convergencia de los métodos

   (a) $y_n - y_{n-2} = \dfrac{h}{3}(7\, f_{n-1} - 2\, f_{n-2} + f_{n-3})$

   (b) $y_n - y_{n-2} = \dfrac{h}{24}(9\, f_{n-1} + 19\, f_{n-2} + 5\, f_{n-3} + f_{n-4})$

8. Dado el método lineal multipaso

$$y_n - (1 + a) y_{n-1} + a y_{n-2} = \frac{1}{2}\, h \left((3 - a) f_{n-1} - (1 + a) f_{n-2} \right)$$

   (a) Estudia convergencia y orden para $a = 0$ y $a = 5$.

   (b) Si alguno de los métodos anteriores converge úsalo para integrar numéricamente la ecuación $y = yt - y^2$, $y(0) = 1$ en el intervalo $0 \leq t \leq 0.6$ con $h = 0.2$ e inicializando con un método de Runge–Kutta orden 2.

9. * Se considera el método multipaso

$$y_n = y_{n-4} + h \left(\frac{8}{3} \cdot f_{n-1} - \frac{4}{3} \cdot f_{n-2} + \frac{8}{3} \cdot f_{n-3} \right).$$

   a) Estudia la estabilidad del método.

   b) Estudia el orden de convergencia del método.

10. * Se considera el sistema de ecuaciones

$$x'(t) = t + z(t)$$
$$z'(t) = x(t) \cdot z(t)$$

Aproxima $(x(2.03), z(2.03))$ aplicando dos pasos con $h = 0.01$ del método de Adams explícito de orden dos. Para inicializar el método utiliza la condición inicial $(x(2), z(2)) = (1, 2)$ y el dato extra $(x(2.01), z(2.01)) = (1.04015, 2.02051)$.

11. Encuentra a y b para que el método multipaso $y_n = y_{n-2} + h(a \cdot f_{n-1} + b \cdot f_{n-2})$ sea consistente del orden lo más alto posible. ¿Es estable ese método?

12. Se quiere resolver el problema de primer orden

$$y'' + y' + 2y = t, \quad y(2) = -1,\ y'(2) = 0.$$

Aproxima $y(2.04)$ tomando $h = 0.01$ y el método anterior.

13. Encuentra a y b para que el método $y_n = y_{n-2} + h \cdot (a \cdot f_n + b \cdot f_{n-3})$ sea convergente del orden lo más alto posible.

14. Dado el sistema

$$\begin{cases} x'(t) = t + z(t) \\ z'(t) = x(t) \cdot z(t) \\ x(2) = 1,\ z(2) = 0. \end{cases}$$

Aproxima $(x(2.03), z(2.03))$ aplicando dos pasos con $h = 0.1$ para el método anterior.

15. Encuentra a, b y c para que el método $y_n + a \cdot y_{n-1} + b \cdot y_{n-2} = h \cdot c \cdot f_n$ sea convergente del orden lo más alto posible.