AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

INTEGRACIÓN EN VARIAS VARIABLES.

1. Calcular para $\Omega = [0,1] \times [0,3]$ las integrales

$$\text{(a)} \iint_\Omega xydxdy. \quad \text{(b)} \iint_\Omega xe^y dxdy. \quad \text{(c)} \iint_\Omega y^2 \sin x dxdy.$$

2. Calcular las integrales dobles siguientes en los recintos que se indican:

   a) $\iint_\Omega ydxdy$ en $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
   b) $\iint_\Omega (3y^3 + x^2)dxdy$ en $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
   c) $\iint_\Omega \sqrt{xy}dxdy$ en $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1,\ y^2 \leq x \leq y\}$.
   d) $\iint_\Omega ye^x dxdy$ en $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, \_0 \leq x \leq y^2\}$.
   e) $\iint_\Omega y + \log x dxdy$ en $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0{,}5 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq x\}$.

3. Calcular las integrales dobles siguientes en los recintos que a continuación se dan:

   a) $\iint_\Omega (4 - y^2)dxdy$ en el recinto limitado por las ecuaciones $y^2 = 2x$ e $y^2 = 8 - 2x$.
   b) $\iint_\Omega (x^4 + y^2)dxdy$ en el recinto limitado por $y = x^3$ e $y = x^2$.
   c) $\iint_\Omega (x + y)dxdy$ en el recinto limitado por $y = x^3$ e $y = x^4$ con $-1 \leq x \leq 1$.
   d) $\iint_\Omega (3xy^2 - y)dxdy$ en la región limitada por $y = |x|$, $y = -|x|$ y $x \in [-1,1]$.

4. Calcular la superficie de las siguientes regiones:

   a) Círculo de radio R.
   b) Elipse de semiejes a, b.
   c) La región limitada por las ecuaciones $x^2 = 4y$ y $2y - x - 4 = 0$.
   d) La región limitada por las ecuaciones $x + y = 5$ y $xy = 6$.
   e) La región limitada por las ecuaciones $x = y$ y $x = 4y - y^2$.

5. Calcular el volumen de los siguientes sólidos:

   a) El limitado por $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ y los planos de coordenadas.
   b) El tronco limitado superiormente por $z = 2x + 3y$ e inferiormente por el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$.

c) Esfera de radio R.

d) Cono de altura h y radio de la base R.

e) El tronco limitado superiormente por la ecuación $z = 2x + 1$ e inferiormente por el disco $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$.

6. Calcular cambiando a coordenadas polares:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy.$

b) $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dydx.$

c) $\displaystyle\int_{1/2}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)^{3/2}\,dydx.$

d) $\displaystyle\int_{0}^{1/2}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} xy\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy.$

7. Calcular para $\Omega = [0,1] \times [0,3] \times [-1,1]$ las integrales

$$\text{(a)} \iiint_\Omega xyz\,dxdydz. \quad \text{(b)} \iiint_\Omega xe^{y+z}\,dxdydz. \quad \text{(c)} \iiint_\Omega y^2z^3 \sin x\,dxdydz.$$

8. Calcular las integrales que a continuación se piden en los recintos correspondientes:

a) $\displaystyle\iiint_\Omega (y^3+z+x)\,dxdydz$ en $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$.

b) $\displaystyle\iiint_\Omega (y\sin z + x)\,dxdydz$ en $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq z \geq y^2,\ 0 \leq x,y \leq 1\}$.

c) $\displaystyle\iiint_\Omega x\,dxdydz$ en $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \geq y^2+x^2,\ 0 \leq z \leq 1\}$.

d) $\displaystyle\iiint_\Omega yxz\,dxdydz$ en $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -5 \leq z \leq y^2+x,\ -1 \leq x,y \leq 1\}$.

9. Calcular el volumen del sólido limitado superiormente por $z = 1$ e inferiormente por $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

10. Calcular el volumen del sólido limitado superiormente por el cilindro parabólico $z = 1 - y^2$, inferiormente por el plano $2x+3y+z+10 = 0$ y lateralmente por el cilindro circular $x^2+y^2+x = 0$.

11. Hallar el volumen del sólido limitado por los paraboloides de ecuaciones $z = 2 - x^2 - y^2$ y $z = x^2 + y^2$.

12. Calcular el volumen del sólido limitado superiormente por la superficie cilíndrica $x^2 + z = 4$, inferiormente por el plano $x + z = 2$ y lateralmente por los planos $y = 0$ e $y = 3$.

13. Haciendo uso de las coordenadas esféricas $x = r\sin\phi\cos\theta$, $y = r\sin\phi\sin\theta$ y $z = r\cos\phi$, calcular:

    a) El volumen de una esfera de radio R.

    b) $\displaystyle\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)dxdydz$ en el recinto $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 2\}$.

    c) El volumen del recinto del apartado (b).

14. Calcular el volumen del cuerpo limitado por las ecuaciones $z = x^2 + 4y^2$, el plano $z = 0$ y lateralmente por los cilindros $x = y^2$ y $x^2 = y$.

15. Calcular el volumen comprendido entre los cilindros $z = x^2$ y $z = 4 - y^2$.

16. Calcular el volumen del balón de Rugby de ecuaciones $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

17. Calcular $\displaystyle\iint_\Omega xydxdy$ donde Ω es la región limitada por las curvas $y = 2x$, $y = 2x - 2$, $y = x$ e $y = x + 1$. Indicación: hacer el cambio de variable $x = u - v$, $y = 2u - v$.

18. Calcular el volumen encerrado por un cilindro de radio $r/2$ y una esfera de radio r cuyo centro está situado en un punto de la superficie del cilindro. Indicación: hacer el cambio a coordenadas cilíndricas.

19. Calcular
$$\iiint_\Omega \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$
donde Ω es la región limitada por las esferas $x^2+y^2+z^2 = a^2$ y $x^2+y^2+z^2 = b^2$, donde $0 < b < a$. Indicación: hacer el cambio a coordenadas esféricas.

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

Campos escalares y vectoriales.

1. Calcular el gradiente de los siguientes campos escalares:

   a) $f(x,y,z) = e^{xyz}$.
   b) $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.
   c) $f(x,y,z) = \sin(xyz)$.
   d) $f(x,y,z) = \cos(x+y+z)$.

2. Calcular la divergencia y el rotacional de los siguientes campos:

   a) $\mathbf{F}(x,y,z) = (\sin x)\mathbf{i} + (\cos y)\mathbf{j}$.
   b) $\mathbf{F}(x,y,z) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$.
   c) $\mathbf{F}(x,y,z) = ax\mathbf{i} + by\mathbf{j} - c\mathbf{k}$, donce $a, b, c \in \mathbb{R}$.
   d) $\mathbf{F}(x,y,z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$.
   e) $\mathbf{F}(x,y,z) = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j}+xz\mathbf{k}$.
   f) $\mathbf{F}(x,y,z) = xyz\mathbf{i} + x^2y^2z^2\mathbf{j} + y^2z^3\mathbf{k}$.

3. Sea $f \in C^2(D,\mathbb{R})$. Se define el *Laplaciano de* f como la divergencia del gradiente de f, esto es

$$\nabla^2 f =< \nabla, \nabla f >= \operatorname{div}(\nabla f).$$

   Una función f se dice *armónica* si $\nabla^2 f = 0$. Identificar cuáles de las siguientes funciones son armónicicas:

   a) $f(x,y) = e^x \cos y$.
   b) $f(x,y,z) = e^{-x}(\cos y - \sin y)$.
   c) $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$.

4. Dadas las funciones $\mathbf{F}(x,y,z) = 2\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + 3y\mathbf{k}$ y $\mathbf{G}(x,y,z) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, calcular:

   a) $\operatorname{rot}(\mathbf{F} \times \mathbf{G})$.
   b) $\operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G})$.

5. Sean f y g dos campos escalares, $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$ dos campos vectoriales y $\alpha \in \mathbb{R}$. Demostrar las siguientes propiedades:

   a) $\nabla(\alpha f) = \alpha \nabla(f)$.
   b) $\nabla(f+g) = \nabla(f) + \nabla(g)$.
   c) $\nabla(f/g) = (g\nabla(f) - f\nabla(g))/g^2$, $g \neq 0$.
   d) $\nabla(fg) = f\nabla(g) + g\nabla(f)$.
   e) $\operatorname{div}(\alpha\mathbf{F}) = \alpha\operatorname{div}(\mathbf{F})$.
   f) $\operatorname{div}(\mathbf{F}+\mathbf{G}) = \operatorname{div}(\mathbf{F}) + \operatorname{div}(\mathbf{G})$.
   g) $\operatorname{rot}(\mathbf{F}+\mathbf{G}) = \operatorname{rot}(\mathbf{F}) + \operatorname{rot}(\mathbf{G})$.
   h) $\operatorname{rot}(\alpha\mathbf{F}) = \alpha\operatorname{rot}(\mathbf{F})$.

i) $\mathrm{div}(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) =< \mathrm{rot}(\mathbf{F}), \mathbf{G} > - < \mathbf{F}, \mathrm{rot}(\mathbf{G}) >$.

j) $\mathrm{rot}(f\mathbf{F}) = f\mathrm{rot}(\mathbf{F}) + (\nabla f \times \mathbf{F})$.

k) $\mathrm{div}(f\mathbf{F}) = f\mathrm{div}(\mathbf{F}) + < \nabla f, \mathbf{F} >$.

l) $\mathrm{div}(f\nabla g) = f\mathrm{div}(\nabla g) + < \nabla f, \nabla g >$.

6. Determinar si los siguientes campos vectoriales son conservativos y en caso de serlo obtener su función potencial:

   a) $\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{2x}{x^2+y^2+z^2}\mathbf{i} + \frac{2y}{x^2+y^2+z^2}\mathbf{j} + \frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\mathbf{k}$.

   b) $\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{1}{x}\mathbf{i} + \frac{1}{y}\mathbf{j} + \frac{1}{z}\mathbf{k}$.

   c) $\mathbf{F}(x,y,z) = (x+y^2)\mathbf{i} + 2yx\mathbf{j}$.

   d) $\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\mathbf{i} + \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\mathbf{j} + \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\mathbf{k}$.

   e) $\mathbf{F}(x,y,z) = (y+z)\mathbf{i} + (x+z)\mathbf{j} + (x+y)\mathbf{k}$.

   f) $\mathbf{F}(x,y,z) = (4x+2y+2z)\mathbf{i} + (2x+4y+2z)\mathbf{j} + (2x+2y+4z)\mathbf{k}$.

7. Sea $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ un campo escalar de clase C^2. Comprobar que

$$\frac{1}{x^2+y^2}\left(\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(x,y) + \frac{\delta^2 f}{\delta y^2}(x,y)\right) = 4\left(\frac{\delta^2 f}{\delta u^2}(u,v) + \frac{\delta^2 f}{\delta v^2}(u,v)\right)$$

   donde $u = x^2 - y^2$ y $v = 2xy$.

8. Demostrar que si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es un campo escalar de clase C^2 y se verifica la igualdad

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(x,y) + \frac{\delta^2 f}{\delta y^2}(x,y) = 0,$$

   entonces también se verifica

$$\frac{\delta^2 f}{\delta u^2}(u,v) + \frac{\delta^2 f}{\delta v^2}(u,v) = 0$$

   donde $x = u/\left(u^2+v^2\right)$ e $y = v/\left(u^2+v^2\right)$.

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS.

Integral de línea.

1. Sea $f(x,y,z) = y$ y $\sigma(t) = (0,0,t)$, $0 \le t \le 1$. Probar que $\int_\sigma f dt = 0$.
2. Calcular las siguientes integrales de trayectoria $\int_\sigma f dt$ donde:
   a) $f(x,y,z) = x + y + z$ y $\sigma(t) = (\sin t, \cos t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
   b) $f(x,y,z) = \cos z$ y σ el mismo de la parte (a).
   c) $f(x,y,z) = x\cos z$ y $\sigma(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$, $t \in [0,1]$.
3. Calcula la longitud de las siguientes curvas:
   a) La circunferencia de radio R.
   b) $\sigma(t) = (t, \sin t, \cos t)$, $t \in [0, \pi]$.
   c) $\sigma(t) = (\sin(4t), 2t^2, \cos(4t))$, $t \in [0, 4\pi]$.
4. Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Evaluar la integral de $\mathbf{F}$ a lo largo de las siguientes curvas:
   a) $\sigma(t) = (t,t,t)$, $0 \le t \le 1$.
   b) $\sigma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $0 \le t \le 2\pi$.
   c) $\sigma(t) = (t^2, 3t, 2t^3)$, $-1 \le t \le 2$.
5. Calcular cada una de las siguientes integrales:
   a) $\int_\sigma xdy - ydx$, $\sigma(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$.
   b) $\int_\sigma xdx + ydy$, $\sigma(t) = (\cos \pi t, \sin \pi t)$, $0 \le t \le 2$.
   c) $\int_\sigma yzdx + xzdy + xydz$ donde σ es la unión de segmentos de recta que unen $(1,0,0)$ a $(0,1,0)$ y este último a $(0,0,1)$.
   d) $\int_\sigma x^2dx - xydy + dz$ donde σ es el arco de la parábola $z = x^2$, $y = 0$ que une $(-1,0,1)$ con $(1,0,1)$.
6. Calcular las siguientes integrales curvilíneas:
   a) $\int_\sigma 2xyzdx + x^2zdy + x^2ydz$,
   b) $\int_\sigma (y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz$,
   c) $\int_\sigma \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z}$,

   siendo σ una curva uniendo los puntos $(1,1,1)$ y $(-1,-1,2)$.
7. Sean σ una curva de clase C^1 y $\mathbf{F}$ un campo vectorial. Demostrar:
   a) Si $\mathbf{F}$ es perpendicular a σ' a lo largo de σ, entonces
   $$\int_\sigma \mathbf{F} dt = 0.$$
   b) Si $\mathbf{F}$ es paralelo a σ' a lo largo de σ, es decir, $\mathbf{F}(\sigma(t)) = \lambda(t)\sigma'(t)$ con $\lambda(t) > 0$, entonces
   $$\int_\sigma \mathbf{F} dt = \int_\sigma \|\mathbf{F}\|\, ds.$$
8. Evaluar $\int_\sigma ydx + (3y^3 - x)dy + zdz$ para cada una de las trayectorias $\sigma(t) = (t, t^n, 0)$, $0 \le t \le 1$, $n \in \mathbb{N}$.
9. Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = (3z^2x + 2xy)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + 3zx^2\mathbf{k}$. Mostrar que la integral de $\mathbf{F}$ a lo largo del perimetro del cuadrado de vértices $(\pm1, \pm1, 5)$ es cero.
10. Calcular $\int_\sigma 2xyzdx + x^2zdy + x^2ydz$, donde σ es una curva sin autointersecciones que conecta $(1,1,1)$ con $(1,2,4)$.
11. Calcular mediante el Teorema de Green las siguientes integrales curvilineas:

a) $\oint_\sigma 3ydx + 5xdy$, con σ la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 1.

b) $\oint_\sigma x^2dy$ donde σ es el rectángulo de vértices $(0,0)$, $(a,0)$, (a,b) y $(0,b)$.

c) $\oint_\sigma (xy+3y^2)dx + (5xy+2x^2)dy$ donde σ es $(x-1)^2+(y-2)^2=1$.

12. Hallar las áreas de la elipse de ecuaciones $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ y la astroide $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

13. Sean $P, Q : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dos funciones de clase $C^1(\Omega)$, con Ω un conjunto simplemente conexo, de manera que $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ en Ω. Demostrar que para cualesquiera dos curvas de Jordan σ_1 y σ_2 contenidas en Ω se verifica que

$$\oint_{\sigma_1} Pdx + Qdy = \oint_{\sigma_2} Pdx + Qdy.$$

14. Sea σ una curva de Jordan que no pasa por el origen y que interseca con cada recta que pasa por el origen en a lo sumo dos puntos. Calcular

$$\oint_\sigma -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

en los caso en que σ encierre y no encierre al origen de coordenadas.

15. Idem para

$$\oint_\sigma -\frac{y^3}{(x^2+y^2)^2}dx + \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2}dy.$$

16. Sea D una región simplemente conexa. Supongamos que $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función armónica, esto es, de clase $C^2(D)$ y satisfaciendo la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in D.$$

Probar que

$$0 = \int_{\mathrm{Fr}(D)} \left(\frac{\partial f}{\partial y}dx - \frac{\partial f}{\partial x}dy \right) = 0.$$

17. Sea S una región simplemente conexa. Demostrar que el área de dicha región vale

$$A(S) = \frac{1}{2}\int_{\partial S} xdy - ydx.$$

Indicación: aplicar el teorema de Green al campo $(P(x,y) = -y,\, Q(x,y) = x)$.

18. Como aplicación del ejercicio anterior, calcula el área de la región limitada por la curva

$$\sigma(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t),\ 0 \le t \le 2\pi.$$

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

Integral de superficie.

1. Hallar el plano tangente de las siguientes superficies en el punto especificado:

   a) $x = 2u$, $y = u^2 + v$, $z = v^2$ en $(0, 1, 1)$.

   b) $x = u^2 - v^2$, $y = u + v$, $z = u^2 + 4v$ en $(-1/4, 1/2, 2)$.

2. ¿Son regulares las superficies del ejercicio anterior?

3. Sea $\Phi(u, v) = (u, v, f(u, v))$, con $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1. Demostrar que la ecuación del plano tangente en $\Phi(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$ coincide con el plano tangente de f en el punto (x_0, y_0).

4. Hallar una expresión para un vector unitario normal a la superficie

   $$x = \cos v \sin u, \quad y = \sin v \sin u, \quad z = \cos u,$$

   para $(u, v) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$. Identificar la superficie.

5. Idem con la superficie

   $$x = 3\cos v \sin u, \quad y = 2\sin v \sin u, \quad z = \cos u,$$

   para $(u, v) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$.

6. Idem para la superficie

   $$x = \sin v, \quad y = u, \quad z = \cos v,$$

   para $(u, v) \in [-1, 3] \times [0, 2\pi]$.

7. Calcular el vector normal a la superficie y determinar la regularidad de la misma siendo

   $$x = (2 - \cos v)\cos u, \quad y = (2 - \cos v)\sin u, \quad z = \sin v,$$

   para $(u, v) \in [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$.

8. Demostrar que el plano de ecuación $ax + by + cz = d$ es una superficie y calcular su vector normal.

9. Hallar:

   a) Una parametrización para el hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 25$.

   b) El vector normal unitario en cada punto de dicha superficie.

   c) Hallar el plano tangente a la superficie en un punto $(x_0, y_0, 0)$.

10. Hallar las áreas de las superficies de los ejercicios 6, 4, 7.

11. Consideremos el Toro de ecuaciones

    $$x = (R - \cos v)\cos u, \quad y = (R - \cos v)\sin u, \quad z = \sin v,$$

    para $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$. Probar que su área es $4\pi^2 R$.

12. Calcular $\iint_S (x + y + z)dS$ donde S es la esfera de radio 1.

13. Calcular $\iint_S z dS$, donde S es la superficie $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \leq 1$.

14. Calcular $\iint_S z^2 dS$, donde S es la frontera del cubo $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.

15. Sea la temperatura en un punto de $\mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = 3x^2 + 3z^2$. El flujo de calor a través de una superficie S se define como $\iint_S -(\nabla T)dS$. Calcular el flujo de calor a través de la superficie $x^2 + z^2 = 2$, $0 \leq y \leq 1$.

16. Idem pero con temperatura $T(x, y, z) = x$ siendo S la esfera de radio uno.

17. Sea S la superficie cerrada formada por el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$ y su base $x^2 + y^2 = 1$. Sea $\mathbf{E}$ el campo eléctrico dado por $\mathbf{E}(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$. Hallar el flujo eléctrico hacia afuera de S.

18. Evaluar $\iint_S \text{rot}\mathbf{F} dS$, donde S es la superficie $x^2 + y^2 + 3z^2 = 1$, $z \leq 0$ y $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, x, zx^3y^2)$. (Tomar el vector normal unitario hacia afuera de S).

19. Hallar el flujo del rotacional de $\mathbf{V}(x, y, z) = (y-2x, yz^2, -y^2z)$ hacia afuera de la semiesfera $x^2+y^2+z^2 = 1$, $z \geq 0$.

20. La lluvia puede ser interpretada como un fluido uniforme que fluye verticalmente hacia abajo y que por tanto, puede ser descrita por el campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (0, 0, -1)$. Hallar el flujo de lluvia a través del cono $z^2 = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \leq 1$, $z \geq 0$. Si debido al viento, la lluvia cae con una inclinación de 45^o y se describe por $\mathbf{F}(x, y, z) = -(\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$, ¿cuál es ahora el flujo a través del cono?

21. Calcula $\iint_S \text{rot}\mathbf{F} dS$ donde S es la semiesfera $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\, x \geq 0\}$ y $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3, -y^3, 0)$.

22. Sea S una superficie cerrada. Usar el Teorema de la divergencia para probar que si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial de clase C^2, entonces
$$\iint_S \text{rot}\mathbf{F} dS = 0.$$

23. Dado el campo escalar $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ y un campo vectorial $\mathbf{F}$, calcular el flujo del campo $\nabla f + \nabla \times \mathbf{F}$ a través de la esfera $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$.

24. Siendo $\mathbf{F}(x, y, z) = (x+2y, -3z, x)$, calcular el flujo del rotacional de $\mathbf{F}$ a través de la superficie $2x+y+2z = 6$ limitada por los planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 2$.

25. Evaluar $\iint_S \mathbf{F} dS$ donde $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy^2, x^2y, y)$ y S es la superficie del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ acotada por los planos $z = 1$ y $z = -1$, incluyendo los trozos $x^2 + y^2 \leq 1$ cuando $z = \pm 1$.

26. Evaluar $\iint_S \mathbf{F} dS$ donde $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, -z)$ y S es la frontera del cubo $[0, 1]^3$.

27. Evaluar $\iint_S \mathbf{F} dS$ donde $\mathbf{F}(x, y, z) = (1, 1, z(x^2 + y^2)^2)$ y S es la superficie del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$.