Ampliación de Matemáticas.
Estabilidad de Ecuaciones Diferenciales

1. Resolver las siguientes ecuaciones homogéneas:

(a) $y'' + y' - 2y = 0$. (b) $y'' - y' - 2y = 0$. (c) $y'' + \lambda^2 y = 0$ donde $\lambda \in \mathbb{R}$.
(d) $y'' - 2y' + y = 0$. (e) $y'' - 4y' - 12y = 0$. (f) $y'' + 2y' + y = 0$.
(g) $y'' + 2y' - 3y = 0$. (h) $4y'' + 4y' + y = 0$. (i) $2y'' - 3y' + y = 0$.
(j) $y'' + 2y' + y = 0$. (k) $y'' + 6y' + 13y = 0$. (l) $y'' + 4y = 0$.
(m) $y'' + 4y' + 5y = 0$. (n) $y'' - 2y' + 6y = 0$. (o) $y^{5)} - 6y^{4)} + 14y^{3)} - 16y'' + 9y' - 2y = 0$.
(p) $y^{3)} - y'' + 2y' - 2y = 0$. (q) $y^{4)} + y'' - 2y = 0$. (r) $y^{6)} - 3y'' + 2y = 0$.

2. Resolver las siguientes ecuaciones no homogéneas:

(a) $y'' + y' - 2y = e^x$. (b) $y'' - y' - 2y = \cos x$. (c) $y'' - 2y' + y = 1$.
(d) $y'' + y = \sin x$. (e) $y'' - 4y' - 12y = x$. (f) $y'' + 2y' + y = x^2$.
(g) $y'' + 2y' - 3y = x^3$. (h) $4y'' + 4y' + y = xe^x$. (i) $2y'' - 3y' + y = x \sin x$.
(j) $y'' + 2y' + y = x \cos 2x$. (k) $y'' + 6y' + 13y = \sin 3x$. (l) $y'' + 4y' + 5y = e^x \cos x$.
(m) $y'' + 4y = e^{2x}$. (n) $y'' - 2y' + 6y = e^x + x$. (o) $y^{3)} - y'' + 2y' - 2y = x$.

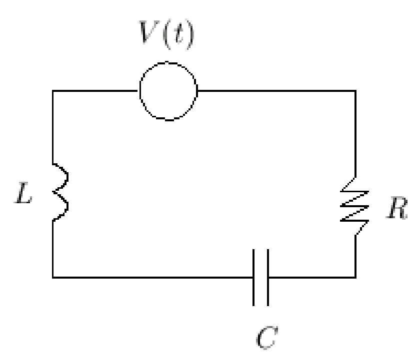
3. Resolver los siguientes problemas de condiciones iniciales:

(a) $\begin{cases} y'' + 2y' + y = x^2 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y'' + y' - 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} y'' - 4y' - 12y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} y'' - 2y' + y = 1 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} y'' - 4y' + y = x \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} y'' + y = \cos x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} y^{3)} - y'' + 2y' - 2y = x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 1 \end{cases}$ (h) $\begin{cases} y'' + y = \sin x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$ (i) $\begin{cases} y'' - y' - 2y = \cos x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$

4. Consideremos el circuito eléctrico de la figura.



Calcular la intensidad de corriente que pasa por los cables de dicho circuito en los siguientes casos:

(a) $C = 1F$; $R = 1\Omega$; $L = 0H$; $V(t) = \sin t$.

(b) $C = 1F$; $R = 2\Omega$; $L = 0H$; $V(t) = e^t \cos(2t)$.

(c) $C = 2F$; $R = 3\Omega$; $L = 0H$; $V(t) = e^{3t}$.

(d) $C = 1F$; $R = 1\Omega$; $L = 1H$; $V(t) = \sin t$.

(e) $C = 0.5F$; $R = 1\Omega$; $L = 1H$; $V(t) = t^2$.

(f) $C = 0.25F$; $R = 4\Omega$; $L = 2H$; $V(t) = -t\cos t$.

5. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales de la forma

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}$$

donde la matriz $\mathbf{A}$ es la siguiente:

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(c)} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{(d)} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(e)} \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{(f)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{(g)} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(h)} \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & 8 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{(i)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Resolver los siguientes problemas de condiciones iniciales:

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{l} x' = y \\ y' = -x \\ x(0) = y(0) = 1. \end{array} \right. \quad \text{(b)} \left\{ \begin{array}{l} x' = -4(x+y) \\ x' + 4y' = -4y \\ x(0) = 1,\ y(0) = 0. \end{array} \right. \quad \text{(c)} \left\{ \begin{array}{l} x' = 3x + 8y \\ y' = -3y - x \\ x(0) = 6,\ y(0) = -2. \end{array} \right.$$

$$\text{(d)} \left\{ \begin{array}{l} x' = x - z \\ y' = 2y \\ z' = x + z \\ x(0) = -2,\ y(0) = 2,\ z(0) = -1. \end{array} \right. \quad \text{(e)} \left\{ \begin{array}{l} x' = y + z \\ y' = -x + z \\ z' = -x - y \\ x(0) = y(0) = z(0) = -1. \end{array} \right.$$

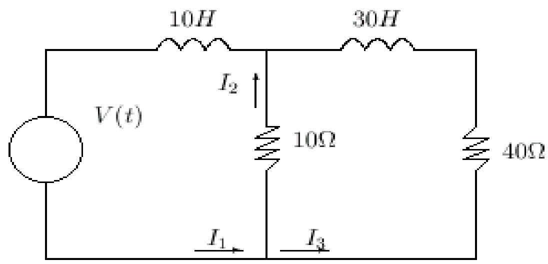
7. Resolver los siguientes sistemas y problemas de condiciones iniciales

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{l} x' = y + te^{2t} \\ y' = -2x + 3y + e^{2t} \\ x(0) = 1,\ y(0) = -1. \end{array} \right. \quad \text{(b)} \left\{ \begin{array}{l} x' = 4x + 3y + 5z + e^t \sin 2t \\ y' = -y - 4z \\ z' = 2y + 3z \end{array} \right.$$

$$\text{(c)}\ \mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{(d)} \left\{ \begin{array}{l} x' = 2x + y - z \\ y' = -3x - y + z + t \\ z' = 9x + 3y - 4z \\ x(0) = z(0) = 0,\ y(0) = 3. \end{array} \right.$$

$$\text{(e)} \left\{ \begin{array}{l} x' = -2x - 5y + t \\ y' = x + 2y + t^2 \\ x(0) = 1,\ y(0) = 0. \end{array} \right. \quad \text{(f)} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin t \end{pmatrix} \\ x(0) = -1,\ y(0) = 0. \end{array} \right.$$

8. Determinar las intensidades que circulan por el siguiente circuito, inicialmente descargado (condiciones iniciales nulas), en los siguientes casos:

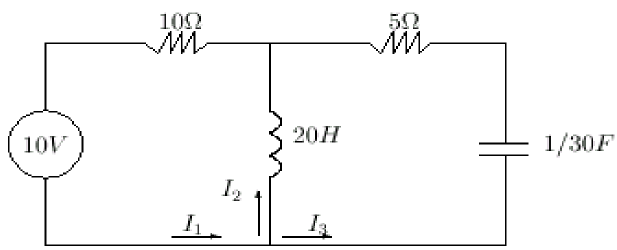


(a) $V(t) = 20\,V$.

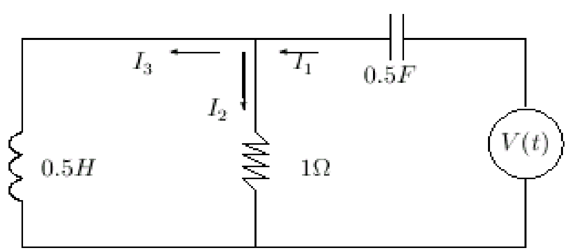
(b) $V(t) = \cos t\,V$.

(c) $V(t) = 10tV$.

9. Suponiendo condiciones iniciales nulas, calcular las intensidades del siguiente circuito

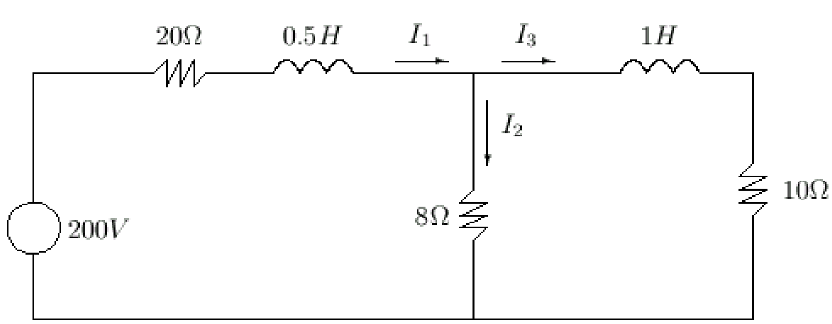


10. Suponiendo condiciones iniciales nulas, calcular las intensidades del siguiente circuito



donde $V(t) = \cos(3t)$.

11. Dado el circuito de la figura, obtener la intensidad que circula por cada una de los cables sabiendo que inicialmente estaba descargado.



12. Resolver el ejercicio anterior suponiendo que el voltaje es de $\sin(2\pi t)$ voltios.

13. Dados los siguientes sistemas lineales, decidir si son estables o no.

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{l} x' = x - 5y + 5z, \\ y' = -2x - 2y + 2z, \\ z' = 3x - 3y + 3z. \end{array} \right. \quad \text{(b)} \left\{ \begin{array}{l} x' = -5x + y - z, \\ y' = -2x - 2y + 2z, \\ z' = -3x + 3y - 3z. \end{array} \right. \quad \text{(c)} \left\{ \begin{array}{l} x' = -x - 2z, \\ y' = 3x - 2y, \\ z' = 4x + z. \end{array} \right.$$

$$\text{(d)} \left\{ \begin{array}{l} x' = -9x + y - 2z, \\ y' = 3x - 9y, \\ z' = 4x + y + z. \end{array} \right. \quad \text{(e)} \left\{ \begin{array}{l} x' = -5x + y - z, \\ y' = -3x - y + 3z, \\ z' = -4x + 4y - 2z. \end{array} \right. \quad \text{(f)} \left\{ \begin{array}{l} x' = -2x - 2y + 2z, \\ y' = -2x - 2y + 2z, \\ z' = 0. \end{array} \right.$$

14. Obtener los puntos críticos de los siguientes sistemas y determinar si son o no hiperbólicos:

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{l} x' = x - xy \\ y' = -y + y^2 \end{array} \right. \quad \text{(b)} \left\{ \begin{array}{l} x' = y \\ y' = -x + x^3 \end{array} \right. \quad \text{(c)} \left\{ \begin{array}{l} x' = x - xy \\ y' = x - y \end{array} \right. \quad \text{(d)} \left\{ \begin{array}{l} x' = y \\ y' = x^3 \end{array} \right.$$

$$\text{(e)} \left\{ \begin{array}{l} x' = y - e^x \\ y' = y + e^{-x} \end{array} \right. \quad \text{(f)} \left\{ \begin{array}{l} x' = -x \\ y' = 1 - x^2 - y^2 \end{array} \right. \quad \text{(g)} \left\{ \begin{array}{l} x' = -x^2 + xy - x + y \\ y' = -x^2 + y^2 + x - 4y + 2 \end{array} \right.$$

15. Consideremos la ecuación de Van Der Pol

$$x'' + x - \varepsilon x'(1 - x^2) = 0$$

donde ε es un parámetro real. Transformar dicha ecuación en un sistema plano y determinar los puntos críticos del mismo. Determinar la naturaleza de los puntos críticos en función del parámetro ε.

16. Idem para la ecuación $x'' + 2\varepsilon x' + (1 - \varepsilon^2)x = 0$.

17. Sea el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x + (\varepsilon + 1)y \\ y' = 2(\varepsilon - 1)x + y \end{array} \right.$$

donde ε es un parámetro real. Discutir la estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema en función del parámetro ε.

   (a) Esbozar el diagrama de fases del sistema para el valor $\varepsilon = 1$.

18. Sea el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = -x + 2x(x + y)^2 \\ y' = -y^3 + 2y^3(x + y)^2. \end{array} \right.$$

Determinar los puntos críticos del mismo y su hiperbolicidad. Determinar la naturaleza del punto crítico $(0, 0)$ a partir de la función $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

19. Idem para el sistema $\left\{ \begin{array}{l} x' = y - xy^2 \\ y' = -x^3 \end{array} \right.$ y la función $V(x, y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}y^2$.

20. Idem con el sistema $\left\{ \begin{array}{l} x' = x^3 - x - y \\ y' = x \end{array} \right.$ y la función $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

21. Idem con el sistema $\left\{ \begin{array}{l} x' = x + x^2 + xy + y^2 \\ y' = x^2 + xy + y^2 \end{array} \right.$ y la función $V(x, y) = x^2 - y^2$ definida sobre el conjunto del plano real $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < |y| < x\}$.

22. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = y + \varepsilon(x^2 + y^2) \\ y' = -x + \varepsilon(xy + y) \end{cases}$$

Se pide:

(a) Estudiar la estabilidad de los punto crítico del sistema $(0,0)$ en función del parámetro ε.

(b) ¿Pueden tender a $(0,0)$ una solución del sistema con $\varepsilon = 0$? ¿Puede tener módulo arbitrariamente grande? Razona tus respuestas.

23. El corredor silvestre de la pradera es atacado, y comido, por el depredador furibundo de la pradera. La variación de la población de corredores es el doble de la cantidad de de corredores menos el número de depredadores, mientras que el deprededador varía su población de manera proporcional al número de depredadores. Si $x(t)$ e $y(t)$ denotan el número de corredores y depredadores, respectivamente, demostrar que siguen la ley

$$\left.\begin{cases} x' = 2(x-y), \\ y' = ky, \end{cases}\right\}$$

donde k es una constante de proporcionalidad. Si inicialmente había 10 corredores y 100 depredadores y al cabo de 1 año había el doble de depredadores, determinar $x(t)$ e $y(t)$. Determinar si se produce la extinción de los corredores, es decir, si alguna vez su población es nula o negativa.

24. En un circuito eléctrico RLC en serie realimentado con un diodo la intensidad x y la diferencia de potencial en los extremos del condensador y verifican el sistema diferencial

$$\begin{cases} x' = y + ax - \arctan x \\ y' = -x \end{cases}$$

donde $a > 0$. Hallar los equilibrios del sistema anterior, determina los valores de a para los que dichos equilibrios son hiperbólicos y estudia su estabilidad para tales valores.

25. Utilizar la transformada de Laplace para resolver los siguientes problemas de Cauchy asociados a ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes:

$$\left.\begin{array}{l} y'''(t) + 5y''(t) + 17y'(t) + 13y(t) = 1 \\ y(0) = y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} y'(t) + 3y(t) = e^{-2t} \\ y(0) = 2 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 5e^{-t}\sin t \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} y''(t) + y(t) = t \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -2 \end{array}\right\}$$

26. Encontrar las funciones de transferencia de los sistemas definidos por las ecuaciones diferenciales del ejercicio 25.

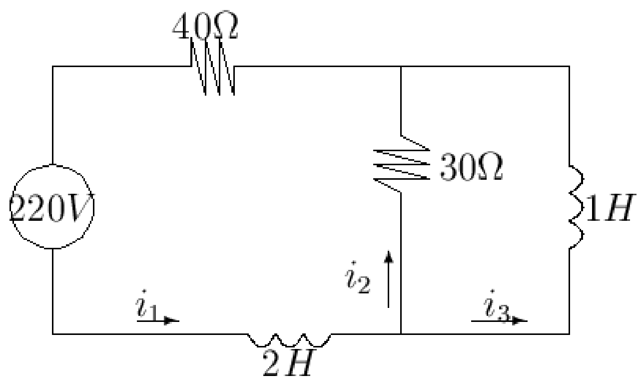
27. Se consideran las siguientes funciones de transferencia de un sistema lineal en tiempo continuo. Determinar en qué casos los sistemas definidos son estables.

$$\text{(a) } F(z) = \frac{z^2+2}{z^3+z} \quad \text{(b) } F(z) = \frac{z}{(z^2+2z+1)(z^2+z+2)}$$

$$\text{(c) } F(z) = \frac{1}{(z^2-2z+1)(z^2+z+2)}$$

(d) $F(z) = \dfrac{2}{z^3 - z^2}$ (e) $F(z) = \dfrac{z}{(z^3 + z + 2)}$ (f) $F(z) = \dfrac{z^2}{z^4 - 2z^2 + 1}$

28. Determinar los valores de la intensidad que circula por el circuito de la siguiente figura cuando el tiempo es suficientemente grande.



29. Sea la ecuación
$$y'' + ay' + by = h_5(t)\cos t,$$
donde $h_5(t)$ denota la función de Heaviside. Dar un par de valores cualesquiera para a y b con la condición de que el sistema homogéneo sea asintóticamente estable y determinar para esos valores la solución de la ecuación para tiempos suficientemente grandes.

30. Obtener la solución de la ecuación diferencial
$$y^{3)} + 3y'' + 4y' + 2 = 4\sin(10t)$$
para tiempos suficientemente grandes (régimen estacionario).

31. Obtener la solución $y(t)$ del siguiente problema, cuando el tiempo t es suficientemente grande
$$\begin{cases} y^{3)} + 6y'' + 11y' + 6y = f(t) \\ y(0) = y'(0) = 0, \ y''(0) = 1234. \end{cases}$$
donde
$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \in [0,1), \\ -1 & \text{si} \quad t \in [1, +\infty). \end{cases}$$