AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS. Curso 2018/19

EXAMEN FINAL. 11–2–2019

Parte Conjunta

1. **(2 puntos)** Obtener los extremos de la función $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ sujeto a las condiciones
$$\begin{cases} y^2 + z^2 \leq 1, \\ x + y + z \leq 1. \end{cases}$$

Solución. En primer lugar comprobaremos que el problema es regular. Si ninguna restricción está activa, el problema es regular. Si la primera restricción está activa, entonces $(0, 2y, 2z)$ es linealmente independiente salvo que $y = z = 0$, valores que no activan la restricción. Si la segunda restricción está activa entonces $(1, 1, 1)$ es linealmente independiente. Finalmente, si ambas están activas, entonces

$$\begin{pmatrix} 0 & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene rango dos salvo que $y = z = 0$, que no es posible. Así, el problema es regular.

El Lagrangiano es

$$L(x, y, z) = x + 2y + 3z + \mu_1(y^2 + z^2 - 1) + \mu_2(x + y + z - 1).$$

Derivamos
$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 + \mu_2 = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2 + 2y\mu_1 + \mu_2 = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial x} = 3 + 2z\mu_1 + \mu_2 = 0.$$

De la primera ecuación se deriva que necesariamente $\mu_2 = -1$. El caso $\mu_1 = 0$ no es posible porque en ese caso, de la segunda ecuación se tendría $\mu_2 = -2$ lo que es imposible. Así $\mu_1 \neq 0$. Las ecuaciones son
$$1 + 2y\mu_1 = 0,$$
$$1 + z\mu_1 = 0,$$
$$y^2 + z^2 = 1,$$
$$x + y + z = 1.$$

De las dos primeras ecuaciones se tiene que

$$y = -\frac{1}{2\mu_1}, \quad z = -\frac{1}{\mu_1},$$

y sustituyendo en la tercera ecuación

$$\frac{1}{4\mu_1^2} + \frac{1}{\mu_1^2} = \frac{5}{4\mu_1^2} = 1$$

de donde
$$\mu_1 = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Si $\mu_1 = +\frac{\sqrt{5}}{2}$ no se cumple la condición de signo, por lo que

$$\mu_1 = -\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Entonces

$$x = 1 - \frac{3\sqrt{5}}{5},\ y = \frac{\sqrt{5}}{5},\ z = \frac{2\sqrt{5}}{5},\ \mu_1 = -\frac{\sqrt{5}}{2},\ \mu_2 = -1,$$

por lo que tenemos candidato a máximo local. El Hessiano es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu_1 \end{pmatrix}$$

que particularizado en el punto es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

El espacio tangente ampliado

$$\mathcal{M}^* \left(1 - \frac{3\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$$

cumple las ecuaciones

$$\left(0, \frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{4\sqrt{5}}{5}\right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{2\sqrt{5}}{5}y + \frac{4\sqrt{5}}{5}z = 0,$$

$$(1,1,1) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x + y + z = 0.$$

Simplificando

$$\begin{cases} y + 2z = 0, \\ x + y + z = 0, \end{cases}$$

con ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = t, \\ y = -2t, \\ z = t. \end{cases}$$

Así

$$(t, -2t, t) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ -2t \\ t \end{pmatrix} = (t, -2t, t) \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{5}t \\ -\sqrt{5}t \end{pmatrix} = -5\sqrt{5}t^2 < 0$$

si $t \neq 0$, por lo que se trata de un maximo.

2. **(2 puntos)** Obtener la solución de la ecuación diferencial

$$y'' + 3y' + 2y = e^t$$

para tiempos suficientemente grandes (régimen estacionario).

Solución. Tomamos la transformada de Laplace

$$\mathcal{L}[y'' + 3y' + 2](z) = \mathcal{L}[e^t](z) = \frac{1}{z-1}.$$

Desarrollando

$$(z^2 + 3z + 2)\mathcal{L}[y](z) - zy(0) - y'(0) - 3y(0) = \frac{1}{z-1},$$

$$\mathcal{L}[y](z) = \frac{zy(0) + y'(0) + 3y(0)}{z^2 + 3z + 2} + \frac{1}{z^2 + 3z + 2}\frac{1}{z-1}.$$

La función de transferencia

$$T(z) = \frac{1}{z^2 + 3z + 2}$$

tiene polos -1 y -2, por lo que el sistema es asintóticamente estable. Por tanto existe el régimen estacionario que calculamos haciendo

$$\begin{aligned} y(t) &= \operatorname{Re}s\left(\frac{e^{zt}}{z^2 + 3z + 2}\frac{1}{z-1}, 1\right) \\ &= \lim_{z\to 1} \frac{e^{zt}}{z^2 + 3z + 2} = \frac{e^t}{6}. \end{aligned}$$

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS. Curso 2018/19

EXAMEN FINAL. 11–2–2019

Teoría de Campos

- Nombre y apellidos:
- DNI:
- En los ejercicios prácticos se valorará que estén explicados, indicando qué resultado o propiedad se ha usado para resolverlo, justificando que dicho resultado se puede utilizar.

1. **(2 puntos)** Sea S la superfice dada por las ecuaciones $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z \geq 0$. Obtener

$$\int\int_S F dS$$

donde $F(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$.

Solución. Consideramos la superficie

$$S_1 = \{(x, y, z) : z = 0 \ y \ x^2 + y^2 = 1.\}$$

Entonces $S \cup S_1$ es una superficie cerrada que encierra un volumen V a la que se puede aplicar el Teorema de Gauss, es decir,

$$\begin{aligned} \int\int_{S\cup S_1} F ds &= \int\int\int_V \operatorname{div}(F) dxdydz \\ &= \int\int\int_V 3(x^2 + y^2 + z^2) dxdydz. \end{aligned}$$

Pasando a coordenadas esféricas

$$\begin{aligned} \int\int\int_V \operatorname{div}(F) dxdydz &= \int\int\int_V 3(x^2 + y^2 + z^2) dxdydz \\ &= \int_0^3 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} 3(r^2 \sin^2\varphi \cos^2\theta + r^2 \sin^2\varphi \sin^2\theta + r^2 \cos^2\varphi) r^2 \sin\theta d\varphi d\theta dr \\ &= \int_0^3 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} 3r^4 \sin\theta d\varphi d\theta dr = \int_0^3 \int_0^{\pi} 3\pi r^4 \sin\theta d\theta dr \\ &= \int_0^3 8\pi r^4 dr = \frac{972}{5}\pi. \end{aligned}$$

Entonces

$$\int\int_S F ds = \frac{972}{5}\pi - \int\int_{S_1} F ds.$$

Calculamos aparte

$$\int\int_{S_1} F ds.$$

Una parametrización de S_1 es

$$\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = 0, \\ (u, u) \in \Omega = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 9\}. \end{cases}$$

$$T_u \times T_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,1)$$

que es interior a la superficie S y por tanto no compatible con la aplicación del Teorema de Gauss, por lo que hemos de cambiar el signo de la integral.

$$\int\int_{S_1} F ds = -\int\int_{\Omega} \langle (u^3, v^3, 0), (0,0,1) \rangle \, dudv = 0.$$

Así

$$\int\int_S F ds = \frac{972}{5}\pi.$$

2. **(2 puntos)** Resolver el siguiente problema

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{yy}, \ t > 0, \ y \in (0,\pi), \\ u(0,y) = 0, \ y \in (0,\pi) \\ u_t(0,y) = y, \ y \in (0,\pi) \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \ t > 0. \end{cases}$$

Solución. La solución formal del problema es

$$u(t,y) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \sin(ny).$$

De la primera condición inicial

$$u(0,y) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(ny),$$

por lo que $a_n = 0$, $n \geq 1$. Derivamos formalmente

$$u_t(t,y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n \cos(nt) \sin(ny),$$

y usando la condición inicial

$$u_t(0,y) = y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n \sin(ny)$$

y entonces

$$b_n n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} y \sin(ny) dy = \frac{-2(-1)^n}{n}$$

y así

$$b_n = \frac{-2(-1)^n}{n^2}.$$

La solución formal es entonces

$$u(t,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2(-1)^n}{n^2} \sin(nt) \sin(ny).$$