

### Parte Común

1. (2 puntos) Encontrar un método de Runge Kutta de orden máximo con el siguiente tablero

$$\begin{array}{c|ccc} 1/6 & a_{21} & & \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & \\ \hline & 0 & b_2 & b_3 \end{array}$$

y utilizarlo para calcular una solución aproximada del problema

$$\begin{cases} x' = xy + t, \\ y' = x - y, \\ x(2) = 1, y(2) = 2. \end{cases}$$

en el tiempo final  $t_f = 2,02$  con tamaño de paso  $h = 0,01$ . Razonar si es posible que los errores cometidos en función de  $h$  sean los que se muestran en la tabla siguiente

|       |        |                        |                       |                       |
|-------|--------|------------------------|-----------------------|-----------------------|
| $h$   | 0,01   | 0,001                  | 0.0001                | 0.00001               |
| Error | 0,0123 | $5,456 \times 10^{-4}$ | $4,56 \times 10^{-7}$ | $4,6 \times 10^{-10}$ |

**Solución.** El error obtenido es compatible con un método de orden tres como el Runge Kutta que vamos a calcular ya que el error se divide por 1000 cuando el número de pasos se multiplica por 10. El paso de 0.01 a 0.001 es posible cuando  $h$  no es suficientemente pequeña. Para calcular el método, nos damos cuenta que  $a_{21} = 1/6$  y planteamos las ecuaciones

$$\begin{cases} b_2 + b_3 = 1, \\ a_{31} + a_{32} = c_3, \\ \frac{b_2}{6} + b_3 c_3 = \frac{1}{2}, \\ \frac{b_2}{36} + b_3 c_3^2 = \frac{1}{3}, \\ b_3 a_{32} = 1. \end{cases}$$

Resolvemos las ecuaciones 1, 3 y 4 obteniendo

$$b_2 = \frac{3}{7}, b_3 = \frac{4}{7}, c_3 = \frac{3}{4}.$$

De aquí fácilmente

$$a_{32} = \frac{7}{4}, a_{31} = -1.$$

El tablero es

$$\begin{array}{c|ccc} 1/6 & 1/6 & & \\ 3/4 & -1 & 7/4 & \\ \hline & 0 & 3/7 & 4/7 \end{array}$$

y el algoritmo, si  $f(t, x, y) = (xy + t, x - y)$  es

$$\begin{aligned} k_1 &= (k_{1x}, k_{1y}) = hf(2, 1, 2), \\ k_2 &= (k_{2x}, k_{2y}) = hf\left(2 + \frac{h}{6}, 1 + \frac{k_{1x}}{6}, 2 + \frac{k_{1y}}{6}\right), \\ k_3 &= (k_{3x}, k_{3y}) = hf\left(2 + \frac{3h}{4}, 1 - k_{1x} + \frac{7}{4}k_{2x}, 2 - k_{1y} + \frac{7}{4}k_{2y}\right), \\ x(2,01) &\simeq 1 + \frac{3}{7}k_{2x} + \frac{4}{7}k_{3x} = 7,012, \\ y(2,01) &\simeq 2 + \frac{3}{7}k_{2y} + \frac{4}{7}k_{3y} = 2,634, \end{aligned}$$

donde únicamente se han tomado tres cifras decimales. Repitiendo el proceso con los nuevos valores  $t = 2,01$ ,  $x_1 = e$   $y_1 =$  obtenemos

$$\begin{aligned}k_1 &= (k_{1x}, k_{1y}) = hf(2,01, 7,012, 2,634), \\k_2 &= (k_{2x}, k_{2y}) = hf\left(2,01 + \frac{h}{6}, 7,012 + \frac{k_{1x}}{6}, 2,634 + \frac{k_{1y}}{6}\right), \\k_3 &= (k_{3x}, k_{3y}) = hf\left(2 + \frac{3h}{4}, 7,012 - k_{1x} + \frac{7}{4}k_{2x}, 2,634 - k_{1y} + \frac{7}{4}k_{2y}\right), \\x(2,02) &\simeq 7,012 + \frac{3}{7}k_{2x} + \frac{4}{7}k_{3x} = 329,378, \\y(2,02) &\simeq 2,634 + \frac{3}{7}k_{2y} + \frac{4}{7}k_{3y} = 28,885.\end{aligned}$$

### Ecuaciones en derivadas parciales

1. (**2 puntos**) Resolver el problema

$$\begin{cases} u_t = 16u_{yy} + y, & t > 0, y \in (0, \pi), \\ u(0, y) = \cos(y), & y \in [0, \pi], \\ u_y(t, 0) = 0, & u_y(t, \pi) = 1, \quad t \geq 0. \end{cases}$$

**Solución.** Planteamos el cambio de variable tal que

$$v_y(t, y) = u_y(t, y) - \frac{y}{\pi}$$

e integrando

$$v(t, y) = u(t, y) - \frac{y^2}{2\pi},$$

y con esta variable el problema queda de la forma

$$\begin{cases} v_t = 16v_{yy} + \frac{16}{\pi} + y, & t > 0, y \in (0, \pi), \\ v(0, y) = \cos(y) + \frac{y^2}{2\pi}, & y \in [0, \pi], \\ v_y(t, 0) = v_y(t, \pi) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

Planteamos la solución de la forma

$$v(t, y) = \frac{T_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cos(ny).$$

Sustituyendo en la ecuación tenemos

$$\frac{T'_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} T'_n(t) \cos(ny) = 16 \left( \sum_{n=1}^{\infty} -T_n(t) n^2 \cos(ny) \right) + \frac{G_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} G_n \cos(ny),$$

donde

$$G_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left( \frac{16}{\pi} + y \right) dy = \frac{\pi^2 + 32}{\pi}$$

y

$$G_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left( \frac{16}{\pi} + y \right) \cos(ny) dy = 2 \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}.$$

Sacando factor común

$$\frac{T'_0(t)}{2} - \frac{G_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (T'_n(t) + 16T_n(t)n^2 - G_n) \cos(ny) = 0,$$

de donde obtenemos las ecuaciones diferenciales

$$T'_0(t) = G_0,$$

$$T'_n(t) + 16T_n(t)n^2 = G_n$$

cuyas soluciones son

$$T_0(t) = c_0 + G_0 t$$

y

$$T_n(t) = c_n e^{-16n^2 t} + \frac{G_n}{16n^2}.$$

Las condiciones iniciales de estas ecuaciones verifican

$$v(0, y) = \cos(y) + \frac{y^2}{2\pi} = \frac{T_0(0)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \cos(ny)$$

por lo que

$$T_0(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left( \cos(y) + \frac{y^2}{2\pi} \right) dy = \frac{\pi}{3},$$

$$T_1(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left( \cos(y) + \frac{y^2}{2\pi} \right) \cos(y) dy = 1 - \frac{2}{\pi}$$

y

$$T_n(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left( \cos(y) + \frac{y^2}{2\pi} \right) \cos(ny) dy = \frac{2(-1)^n}{\pi n^2}.$$

Entonces

$$T_0(0) = c_0 =,$$

$$T_1(0) = c_1 + \frac{G_1}{16} = 1 - \frac{2}{\pi} \rightarrow c_1 = 1 - \frac{7}{4\pi}$$

y

$$T_n(0) = c_n + \frac{G_n}{16n^2} = \frac{2(-1)^n}{\pi n^2} \rightarrow c_n = \frac{16(-1)^n n^2 - (-1)^n + 1}{8\pi n^4}.$$

Así, la solución es

$$\begin{aligned} u(t, y) &= v(t, y) + \frac{y^2}{2\pi} \\ &= \frac{T_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cos(ny) + \frac{y^2}{2\pi} \\ &= \frac{\pi}{6} + \frac{\pi^2 + 32}{2\pi} t + \left( \left( 1 - \frac{7}{4\pi} \right) e^{-16t} - \frac{1}{4\pi} \right) \cos y \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{16(-1)^n n^2 - (-1)^n + 1}{8\pi n^4} e^{-16n^2 t} + \frac{(-1)^n - 1}{8\pi n^4} \right) \cos(ny) + \frac{y^2}{2\pi} \end{aligned}$$