Matemática Discreta (GCID). 3101_2-11_4-3751_8

- Nombre y apellidos:
- DNI:

1. **(1.5 puntos)** Enunciar y demostrar el Teorema de Euler sobre grafos planos. ¿Son el grafo completo K_5 y el bipartito $K_{3,3}$ planos?

   Solución. Teoría.

2. **(1.5 puntos)** Enunciar y demostrar el Teorema de Bezout. Como aplicación, utilizarlo para obtener el inverso de 1234 en $\mathbb{Z}_{1235}$.

   Solución. Teoría. Como aplicación, tomamos el algoritmo extendido de euclides y calculamos

$$\begin{pmatrix} 1235 & 1 & 0 \\ 1234 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1 - F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1234 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1 \times F_2]{} \begin{pmatrix} 1234 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

   por lo que $\gcd(1234, 1235) = 1$ y por el Teorema de Bezout

$$1 = 1 \cdot 1235 + (-1) \cdot 1234,$$

   por lo que

$$1234^{-1} = -1 = 1234.$$

3. **(1 punto)** Dadas las proposiciones p, q, y r, y sabiendo que $p \vee q$, $\neg(p \vee r)$ y $p \vee r \vee q$ son ciertas, comprobar, tanto mediante tablas de verdad como sin usarlas, si $q \wedge \neg p \wedge \neg r$ es verdad.

   Solución. Tomamos la tablas de verdad

p	q	r	$p \vee q$	$\neg(p \vee r)$	$p \vee r \vee q$	$p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$	$\neg p$	$\neg r$	$q \wedge \neg p \wedge \neg r$	$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \rightarrow p_4$
1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1
0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1

   donde $p_1 = p \vee q$, $p_2 = \neg(p \vee r)$, $p_3 = p \vee r \vee q$, y $p_4 = q \wedge \neg p \wedge \neg r$. Como vemos $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \rightarrow p_4$ es una tatulogía y por tanto el razonamiento es válido.

   Sin hacer uso de tablas de verdad. Como $\neg(p \vee r)$ es equivalente a $\neg p \wedge \neg r$ y es cierta, debe ocurrir que $\neg p$ y $\neg r$ deben ser ambos ciertos, por lo que p y r deben de ser falsos. Como $p \vee r \vee q$ es verdad, entonces q debe de ser verdad. Consecuentemente, $q \wedge \neg p \wedge \neg r$ es verdad.

4. **(1 punto)** En un bar tienen 500 botellas de 3 bebidas diferentes, dos alcohólicas, whisky y ginebra, y una sin alcohol de limón. Frecuentan el garito 99 parroquianos con gustos dispares. Ninguno bebe más de dos bebidas diferentes. Se sabe que 44 beben ginebra, 58 limón, 33 whisky con limón, 24 ginebra con limón, y nadie bebe más de una bebida alcohólica. Responder razonadamente a las siguientes cuestiones.

a) ¿Cuántos parroquianos beben whisky?

b) ¿Cuántos parroquianos solo beben limón?

Solución. Sea W el conjunto de personas que beben whisky, G los que beben ginebra y L los que beben limón. Sabemos que $W \cap G = \emptyset$. Entonces por el principio de inclusión exclusión tenemos que

$$\begin{aligned} 99 &= |G \cup W \cup L| = |G| + |W| + |L| - |G \cap L| - |W \cap L| \\ &= 44 + |W| + 58 - 33 - 24, \end{aligned}$$

de donde $|W| = 54$ solución de (a). Para (b) notamos que

$$L = (L \cap (G \cup W)) \cap (L \cap (G \cup W)^c) .$$

Calculamos

$$|L \cap (G \cup W)| = |(L \cap G) \cup (L \cap W)| = |L \cap G| + |L \cap W| = 24 + 33 = 57.$$

Así

$$|L \cap (G \cup W)^c| = |L| - |L \cap (G \cup W)| = 58 - 57 = 1.$$

5. **(1 punto)** Sea un árbol G que solo tiene vértices de grado 5 o de grado 1. Probar que entonces el número de vértices de grado 1 que hay coincide con el triple del de vértices de grado 5 más 2.

   Solución. Se sabe que el conjunto de vértices $V = V_1 \cup V_5$, donde V_1 son los vértices de grado uno y V_5 son los vértices de grado cinco. Por el Toerema del apretón de manos

$$2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in V_1} \deg(v) + \sum_{v \in V_5} \deg(v) = |V_1| + 5|V_5|,$$

   donde $|E|$ es el número de aristas del grafo. Por tratarse de un árbol

$$|V| = |V_1| + |V_5| = |E| + 1.$$

   Eliminando $|E|$ en ambas igualdades

$$2|V_1| + 2|V_5| = |V_1| + 5|V_5| + 2,$$

   de donde

$$|V_1| = 3|V_5| + 2.$$

6. **(1 punto)** Encontrar el menor entero positivo x tal que es divisible por 2, cuando se divide entre 13 se obtiene un resto igual a 2, cuando se divide entre 17 se obtiene un resto igual a 13 y cuando se divide entre 23 se obtiene un resto igual a 17.

   Solución. Tal número x cumple las ecuaciones

$$\begin{cases} x \equiv 0 \pmod{2}, \\ x \equiv 2 \pmod{13}, \\ x \equiv 13 \pmod{17}, \\ x \equiv 17 \pmod{23}. \end{cases}$$

Como 2, 13, 17 y 23 son coprimos dos a dos, se puede aplicar el Teorema Chino de los restos. Calculamos $M = 2{\cdot}13{\cdot}17{\cdot}23 = 10166$, $M_1 = 13{\cdot}17{\cdot}23 = 5083$, $M_2 = 2{\cdot}17{\cdot}23 = 782$, , $M_3 = 2 \cdot 13 \cdot 23 = 598$ and , $M_4 = 2 \cdot 13 \cdot 17 = 442$. Escribimos las ecuaciones

$$\begin{cases} 5083y \equiv 1 (\operatorname{mod} 2), \\ 782y \equiv 1 (\operatorname{mod} 13), \\ 598y \equiv 1 (\operatorname{mod} 17), \\ 442y \equiv 1 (\operatorname{mod} 23), \end{cases}$$

que se simplifica a

$$\begin{cases} y \equiv 1 (\operatorname{mod} 2), \\ 2y \equiv 1 (\operatorname{mod} 13), \\ 3y \equiv 1 (\operatorname{mod} 17), \\ 5y \equiv 1 (\operatorname{mod} 23), \end{cases}$$

con soluciones $s_1 = 1$, $s_2 = 7$, $s_3 = 6$ y $s_4 = 14$. Entonces

$$x = 0 \cdot 1 \cdot 5083 + 2 \cdot 7 \cdot 782 + 13 \cdot 6 \cdot 598 + 17 \cdot 14 \cdot 442 = 162788 \equiv 132 (\operatorname{mod} 10166).$$

7. **(1 punto)** Encontrar las soluciones enteras de la ecuación

$$34x + 242y = 678.$$

Solución. Calculamos $\gcd(34, 242) = 2$. Como 2 divide 678, hay solución. Simplicamos a

$$17x + 121y = 339,$$

y tomamos la ecuación

$$121y = 339 (\operatorname{mod} 17),$$

que se simplifca a

$$2y = 16 (\operatorname{mod} 17),$$

con solución

$$y = 16 \cdot 2^{-1} = 16 \cdot 9 = 8 (\operatorname{mod} 17).$$

Así,

$$y = 8 + 17n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

y

$$17x + 121\,(8 + 17n) = 339,$$

de donde

$$x = -37 - 121n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

8. **Ejericio para recuperar las prácticas.** Utilizando el código RSA explicado en el manual de prácticas se ha enviado los cuatro números del pin de una tarjeta de crédito dígito a dígito. Sabiendo que un primo es $p = 5$ y el otro q es el menor entero positvo solución del sistema

$$\begin{cases} x \equiv 4 (\operatorname{mod} 7), \\ x \equiv 5 (\operatorname{mod} 6), \\ x \equiv 1 (\operatorname{mod} 5). \end{cases}$$

y que se ha codificado con el número $e = 27$, calcular utilizando el algoritmo de Euclides extendido, el número necesario para desencriptar 2-42-49-4 y escribir los cuatro números del pin.

Solución. Como el de mayo de 2024.