Matemática Discreta (GICD). 29–5–2023

- Nombre y apellidos:
- DNI:

1. **(1.5 puntos)** Sea $G = (V, E)$ un grafo simple. Probar que G es un árbol si y solo si G es conexo y $|V| = |E| + 1$.

   Solución. Teoría.

2. **(1.5 puntos)** Definir la función φ de Euler y explicar su utilidad para calcular inversos de elementos de $\mathbb{Z}_n$. Como aplicación calcular los inversos de 5 en $\mathbb{Z}_{13}$, 7 en $\mathbb{Z}_{22}$ y 4 en $\mathbb{Z}_{24}$.

   Solución. Teoría. Sobre la aplicación, como $\gcd(5, 13) = 1$, existe 5^{-1} en $\mathbb{Z}_{13}$ que se calcula como
$$5^{-1} = 5^{\varphi(13)-1} = 5^{11} \equiv 8 (\operatorname{mod} 13).$$
   Igualmente $\gcd(7, 22) = 1$, así que
$$7^{-1} = 7^{\varphi(22)-1} = 7^{\varphi(11)\varphi(2)-1} = 7^9 \equiv 19 (\operatorname{mod} 22).$$
   Como $\gcd(4, 24) = 4 \neq 1$, no existe el inverso.

3. Sabiendo que $p \to \neg q$, $r \wedge q$ y r son ciertas, deducir la veracidad de $\neg p$ de las siguientes formas:

   (a) **(0.75 puntos)** Utilizando tablas de verdad.

   Solución. Hemos de ver que $P = (p \to \neg q) \wedge (r \wedge q) \wedge r \to \neg p$ es una tautología. Para ello

p	q	r	$\neg q$	$p \to \neg q$	$r \wedge q$	$(p \to \neg q) \wedge (r \wedge q) \wedge r$	$\neg p$	P
1	1	1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0	1	1
0	0	0	1	1	0	0	1	1

   que como vemos es tautología.

   (b) **(0.75 puntos)** Sin utilizar tablas de verdad.

   Solución. Como r es cierto, y $r \wedge q$ es verdad, necesariamente q es verdad. Entonces $\neg q$ es falso, y como $p \to \neg q$ es cierto, p debe de ser falso, por lo que $\neg p$ es cierto.

4. **(1.5 puntos)** De los 600 habitantes de Villaverde del Cerro Durmiente a 434 les gusta jugar a las cartas, a 223 jugar al frontón y 333 juegan a los bolos. Hay 10 que no juegan a nada, pero a cambio 131 juegan a las cartas y el frontón, 126 al frontón y los bolos y 143 a los bolos y las cartas. ¿Cuántos de ellos juegan a todo? ¿Cuántos únicamente a las cartas?

Solución. Sea A el conjunto de los que juegan a cartas, B los que lo hacen al frontón y C a bolos. Sabemos que

$$|A \cup B \cup C| = 590,$$
$$|A| = 434,\ |B| = 223,\ |C| = 333,$$
$$|A \cap B| = 131,\ |A \cap C| = 143,\ |B \cap C| = 126.$$

Por el principio de inclusión exclusión tenemos que

$$\begin{aligned} |A \cap B \cap C| &= |A \cup B \cup C| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap A| \\ &= 590 - 434 - 223 - 333 + 131 + 143 + 126 \\ &= 0, \end{aligned}$$

por lo que nadie juega a las tres cosas.

Para el segundo apartado, sabemos que

$$A = [A \cap (B \cup C)] \cup [A \cap (B \cup C)^c]$$

y

$$[A \cap (B \cup C)] \cap [A \cap (B \cup C)^c] = \emptyset.$$

Por otra parte

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

de donde, por el principio de inclusión exclusión tenemos que

$$\begin{aligned} |(A \cap B) \cup (A \cap C)| &= |A \cap B| + |A \cap C| - |A \cap B \cap C| \\ &= 131 + 143 - 0 = 274. \end{aligned}$$

Entonces

$$|A \cap (B \cup C)^c| = |A| - |A \cap (B \cup C)| = 434 - 274 = 160.$$

5. **(1 punto)** Encontrar el menor entero positivo x tal que cuando se divide entre 4 se obtiene un resto igual a 2, cuando se divide entre 7 se obtiene un resto igual a 5 y cuando se divide entre 11 se obtiene un resto igual a 10.

Solución. Reescribimos el enunciado como

$$\begin{cases} x \equiv 2 (\operatorname{mod} 4), \\ x \equiv 5 (\operatorname{mod} 7), \\ x \equiv 10 (\operatorname{mod} 11). \end{cases}$$

Por el Teorema Chino de los restos, que puede aplicarse ya que 7, 4 y 11 son coprimos dos a dos, planteamos las ecuaciones

$$\begin{cases} 77x \equiv 1 (\operatorname{mod} 4), \\ 44x \equiv 1 (\operatorname{mod} 7), \\ 28x \equiv 1 (\operatorname{mod} 11). \end{cases}$$

o equivalentemente

$$\begin{cases} x \equiv 1 (\operatorname{mod} 4), \\ 2x \equiv 1 (\operatorname{mod} 7), \\ 6x \equiv 1 (\operatorname{mod} 11). \end{cases}$$

La primera ecuación tiene 1 por solución, mientras que la solución de la segunada es

$$x = 2^{-1} = 4,$$

y la de la tercera

$$x = 6^{-1} = 2.$$

La solución al problema será entonces

$$x = 77 \cdot 1 \cdot 2 + 44 \cdot 4 \cdot 5 + 28 \cdot 2 \cdot 10 = 1594 \equiv 54 \operatorname{mod}(308),$$

por lo que el número más pequeño solución será 54.

6. **(1 punto)** Un grafo $G = (V, E)$ que no contiene ciclos tiene 343 vértices y 333 aristas. ¿Puede ser conexo? En caso negativo, ¿cuántas componentes conexas tiene?

   Solución. Un grafo sin ciclos conexo es un árbol, que satisface que $|V| = |E| + 1$, por lo que no puede ser conexo ya que $343 \neq 334$. Como cada componente conexa tiene que ser un árbol y por lo tanto satisfacer la fórmula anterior, tenemos que debe haber 343-333=10 componentes conexas.