

Matemática Discreta (GCID). 15-1-2026

- Nombre y apellidos:
- DNI:

Se debe razonar la respuesta a cada pregunta todos los resultados que se usan con la mayor precisión posible.

1. **(2 puntos)** Enunciar y demostrar el teorema de caracterización de árboles. Como aplicación, demostrar que si G es un grafo conexo, tal que solo tiene vértices de grados 1 y 7, y tal que el número total de vértices es seis veces el número de vértices de grado 7 más 2, entonces G es un árbol.

Solución. La primera parte es teoría. Para la aplicación, sea $V = V_1 \cup V_2$, donde V_1 es el conjunto de vértices de grado uno y V_2 es el conjunto de vértices de grado siete. Sabemos, por el principio de inclusión-exclusión, que

$$|V| = |V_1| + |V_2| = 6|V_2| + 2,$$

de donde

$$|V_1| = 5|V_2| + 2,$$

y

$$6|V_2| = |V| - 2.$$

Por el teorema del apretón de manos

$$2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in V_1} \deg(v) + \sum_{v \in V_2} \deg(v) = |V_1| + 7|V_2|.$$

Entonces,

$$2|E| = 12|V_2| + 2,$$

de donde

$$|E| = 6|V_2| + 1 = |V| - 1,$$

y como G es conexo, se trata de un árbol.

2. **(2 puntos)** Sea $X = \{(2, 1), (2, 4), (3, 3), (4, 8), (5, 1), (6, 5), (7, 9)\}$ y sea \sim_R la relación de orden en X definida por $(a, b) \sim_R (c, d)$ si $a \leq c$ y $b \leq d$. Se pide:
 - (a) Dibujar su diagrama de Hasse.
 - (b) Si $A = \{(2, 4), (4, 8), (6, 5)\}$, calcular justificadamente sus cotas superiores e inferiores, sus supremos e ínfimos, máximo y mínimo, y elementos maximales y minimales.
 - (c) Si el diagrama de Hasse es un grafo ponderado, donde el peso de cada arista de extremos (a, b) y (c, d) coincide con $\max\{|c - a|, |d - b|\}$, utilizar el algoritmo de para descubrir el camino de peso mínimo de $(2, 1)$ a $(7, 9)$.

Solución. El diagrama de Hasse puede verse en la figura 1.

El orden es parcial, con $(2, 4)$ como elemento minimal y de hecho, mínimo de A , aunque $(2, 1)$ también es cota inferior. Tiene $(7, 9)$ como cota superior y supremo, aunque no es máximo por no pertenecer a A . Tanto $(4, 8)$ como $(6, 5)$ son elementos maximales.

El camino de peso mínimo viene del camino $(2, 1), (3, 3), (6, 5), (7, 9)$, de peso 9. Aplicar el algoritmo de Dijkstra de forma directa para verificarlo.

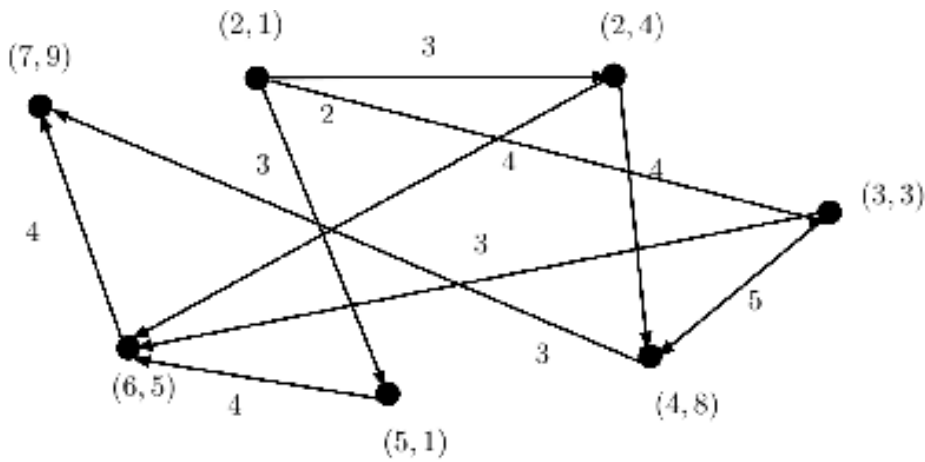


Figura 1: Diagrama de Hasse.

3. (1.5 puntos) Se sabe que en una tienda tienen 56 botellas de 7 bebidas diferentes, cuatro alcohólicas y tres sin alcohol. Responder razonadamente a las siguientes cuestiones.

- ¿Cuántos cócteles pueden hacerse de cuatro bebidas si es posible repetir bebida?
- ¿Cuántos cócteles pueden hacerse de tres bebidas si no es posible repetir bebida?
- ¿Cuántos cócteles pueden hacerse de cuatro bebidas si no es posible repetir bebida y al menos hay una bebida alcohólica?

Solución. (a) Se trata de combinaciones con repetición

$$\binom{10}{4} = \frac{10!}{6!4!} = 210 \text{ cócteles.}$$

(b) Se trata de combinaciones sin repetición

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!4!} = 35 \text{ cócteles.}$$

(c) Utilizando el principio del producto, y sabiendo que el cóctel puede tener hasta cuatro bebidas alcohólicas sin repetición, tenemos que

$$\begin{aligned} & \binom{3}{3} \cdot \binom{4}{1} + \binom{3}{2} \cdot \binom{4}{2} + \binom{3}{1} \cdot \binom{4}{3} + \binom{3}{0} \cdot \binom{4}{4} \\ &= 4 + 3 \cdot 6 + 3 \cdot 4 + 1 = 35 \text{ cócteles.} \end{aligned}$$

4. (1.5 puntos) Resolver las siguientes cuestiones:

- Obtener la menor solución positiva del siguiente sistema de congruencias, en caso de existir

$$\begin{cases} 2x \equiv 5 \pmod{11}, \\ x \equiv 2 \pmod{6}, \\ 3x \equiv 1 \pmod{5}. \end{cases}$$

- Obtener, en caso de existir, la solución o soluciones a la ecuación

$$28x + 12 = 0 \quad \text{en } \mathbb{Z}_{37}.$$

Solución. (a) Rescribimos $2x \equiv 5 \pmod{11}$ como $x \equiv 2^{-1} \cdot 5 \pmod{11} \equiv 6 \cdot 5 \pmod{11} \equiv 8 \pmod{11}$ y $3x \equiv 1 \pmod{5}$ como $x \equiv 3^{-1} \pmod{5} \equiv 2 \pmod{5}$ mediante un método válido. Entonces tenemos

$$\begin{cases} x \equiv 8 \pmod{11}, \\ x \equiv 2 \pmod{6}, \\ x \equiv 2 \pmod{5}, \end{cases}$$

que tiene solución porque 11, 6 y 5 son coprimos dos a dos. Planteamos las ecuaciones

$$\begin{cases} 35s \equiv 1 \pmod{11}, \\ 55s \equiv 1 \pmod{6}, \\ 66s \equiv 1 \pmod{5}, \end{cases}$$

que equivale a

$$\begin{cases} 2s \equiv 1 \pmod{11}, \\ s \equiv 1 \pmod{6}, \\ s \equiv 1 \pmod{5}, \end{cases}$$

con soluciones $s_1 = 6$, y $s_2 = s_3 = 1$. Entonces

$$x = 8 \cdot 6 \cdot 35 + 2 \cdot 1 \cdot 55 + 2 \cdot 1 \cdot 66 = 1922 \equiv 272 \pmod{330}.$$

(b) Rescribimos la ecuación $28x + 12 = 0$ como

$$28x \equiv 25 \pmod{37},$$

con solución única dado que 37 es primo. La solución es

$$x \equiv 28^{-1} \cdot 25 \pmod{37}$$

y calculando $28^{-1} = 4$ por algún método adecuado, tenemos que $x \equiv 4 \cdot 25 \pmod{37} \equiv 26$.

5. **(1 punto)** Dadas las proposiciones p , q , y r , y sabiendo que $(r \leftrightarrow p) \wedge (q \vee p)$ y $q \rightarrow (r \vee p)$ son ciertas, comprobar con y sin tablas de verdad si las proposiciones p , q , r son verdad o no.

Solución. Tomamos las tablas de verdad

p	q	r	$r \leftrightarrow p$	$q \vee p$	$(r \leftrightarrow p) \wedge (q \vee p)$	$r \vee p$	$q \rightarrow (r \vee p)$	$P_1 \wedge P_2$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0	1	1	0
0	1	0	1	1	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	1	0
0	0	0	1	0	0	0	1	0

donde $P_1 \equiv (r \leftrightarrow p) \wedge (q \vee p)$ y $P_2 \equiv q \rightarrow (r \vee p)$ y así

$(P_1 \wedge P_2) \rightarrow p$	$(P_1 \wedge P_2) \rightarrow q$	$(P_1 \wedge P_2) \rightarrow r$
1	1	1
1	1	1
1	0	1
1	1	1
1	1	1
1	1	1
1	1	1
1	1	1
1	1	1

por lo que p y r son verdad, al ser la proposición una tautología, y q no por no serlo.

Sin tablas, tenemos que como $(r \leftrightarrow p) \wedge (q \vee p)$ es verdad, entonces $r \leftrightarrow p$ es verdad, por lo que o bien r y p son verdad o bien son ambas falsas. Si fueran falsas, entonces $r \vee p$ sería falso y entonces para que $q \rightarrow (r \vee p)$ fuera verdad q tendría que ser falso. Pero entonces $q \vee p$ sería falso y $(r \leftrightarrow p) \wedge (q \vee p)$ falso también, lo que nos lleva a una contradicción. Por lo tanto r y p son verdad necesariamente. En ese caso, con q falso son verdaderas tanto $(r \leftrightarrow p) \wedge (q \vee p)$ como $q \rightarrow (r \vee p)$, por lo que no podemos deducir que q sea verdad.